Módulos de matemáticas

Aprendizaje paso a paso

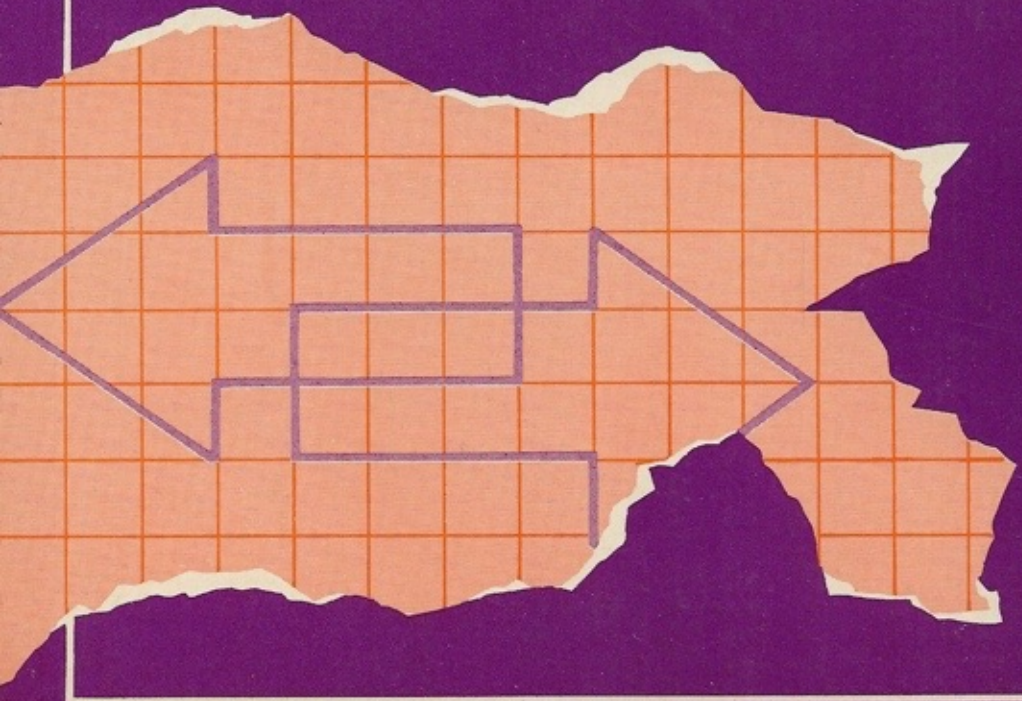
Bloque 6

Geometría analítica

# Módulo 1

# INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Conrado Flores García



trillas

## SERIE MÓDULOS DE MATEMÁTICAS

**Conrado Flores García**

A través del tiempo y en todos los niveles de aprendizaje, los estudiantes han considerado a las matemáticas como un escollo insalvable. Aun cuando se han establecido nuevos enfoques pedagógicos para la enseñanza de esta materia, casi siempre los educandos enfrentan su estudio con verdadero temor, debido al prejuicio generalizado sobre la supuesta dificultad de esta asignatura.

La serie *Módulos de matemáticas*, a la cual pertenece el presente texto, es un valioso auxiliar con el que puede abordarse sencilla y eficazmente el proceso de enseñanza-aprendizaje de este campo de conocimiento.

Es necesario destacar que los *Módulos de matemáticas* constituyen un método de *aprendizaje paso a paso*, ya que la información se presenta por medio de cuadros didácticos (informativos, de preguntas y de respuestas), que están organizados en orden creciente de complejidad. De este modo, se conduce *paso a paso* al lector desde los conceptos más elementales, como los de conjunto y elemento, hasta los más complejos de cálculo integral, pasando por aquéllos del álgebra (estructuras, operaciones y modelos), de la lógica matemática, de la geometría euclidiana, de la trigonometría, de la geometría analítica y del cálculo diferencial.

Mediante este novedoso sistema, más ágil y motivador que el de la enseñanza programada, se facilita tanto la exposición de los temas como la comprensión y asimilación de los mismos.

El autor revisa el panorama matemático fundamental a lo largo de los 64 módulos que, agrupados en 8 bloques, constituyen la serie. Además, cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos denominado *Memo*.

Los profesores de enseñanza secundaria, de preparatoria y de universidad pueden emplear los *Módulos de matemáticas* como parte integrante de sus guiones didácticos y los estudiantes tienen la posibilidad de incorporarse como material complementario y de apoyo a las experiencias adquiridas en el aula. Asimismo, estos libros son útiles para las personas que quieran actualizar o bien repasar, sus conocimientos en esta área o para quienes deseen iniciar un aprendizaje autodidáctico por la imposibilidad de asistir a una institución educativa.

Esperamos que al estudiar los Módulos de matemáticas, los alumnos se den cuenta de que esa fortaleza defendida por ejércitos de números, símbolos y fórmulas, aparentemente inexpugnable, puede ser alcanzada por cualquier persona decidida y tesonera.

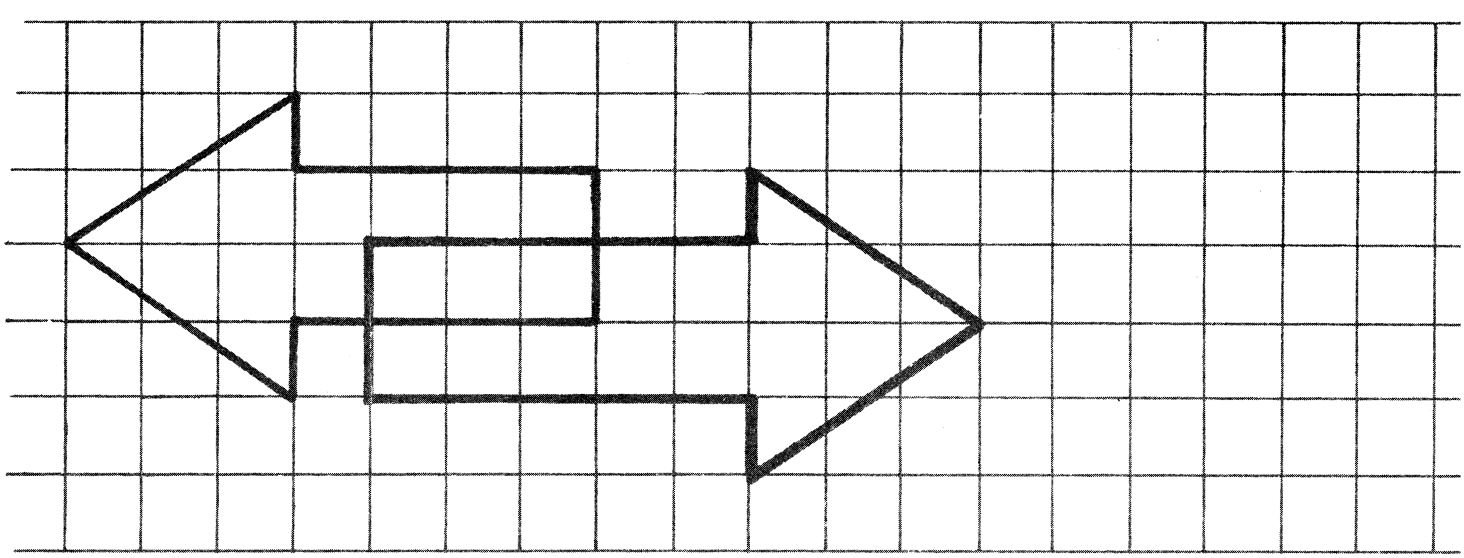
# INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Obras que integran el bloque 6 *(Geometría analítica):*

1. ***Introducción a la geometría analítica***
2. La recta
3. La circunferencia
4. La elipse
5. La hipérbola
6. La parábola
7. Las cónicas y la ecuación general de segundo grado
8. Relaciones y lugares geométricos.

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



# Módulos de matemáticas

## Bloque 6
## Geometría analítica

# Módulo 1

# INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España, Venezuela.

*La presentación y disposición en conjunto de*
*INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA*
*son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra*
*puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema*
*o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,*
*la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento*
*de información), sin consentimiento por escrito del editor*

*Derechos reservados*
*© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.*
*Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,*
*Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.*

*Miembro de la Cámara Nacional de la*
*Industria Editorial. Reg. núm. 158*

Primera edición, julio 1984
ISBN 968-24-1248-x

*Impreso en México*

# PRESENTACIÓN

## Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

**Sugerencias a los lectores**

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo ☞, el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

## ÍNDICE DE CONTENIDO

*Presentación*

*Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos*

1.1 Distancia entre dos puntos en la recta real 9

1.2 Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano 20

1.3 División de un segmento según una razón dada. Punto medio de un segmento 44

1.4 Pendiente y ángulo de inclinación de una recta 63

1.5 Ángulo formado por dos rectas 79

1.6 Paralelismo, colinealidad y perpendicularidad 86

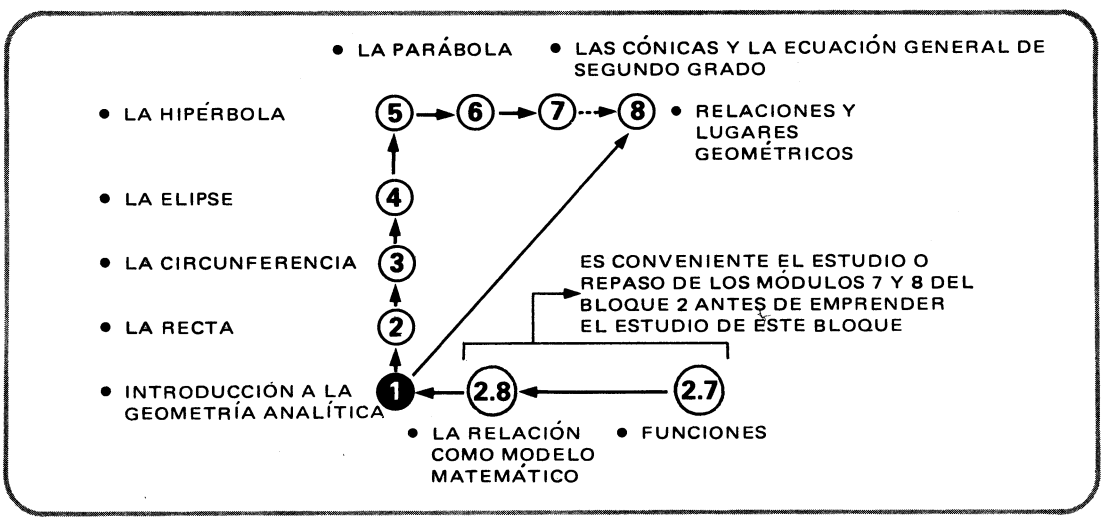
1.7 Ejercicios de aplicación 94

## OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

### Bloque 6. Geometría analítica

*Objetivos:* caracterizar en el plano cartesiano el lugar geométrico representado por una relación cuya regla de correspondencia es una ecuación lineal, una ecuación cuadrática, o bien, una ecuación, una desigualdad, un sistema de ecuaciones o de desigualdades

*Esquema estructural del bloque 6*




### Módulo 1. Introducción a la geometría analítica

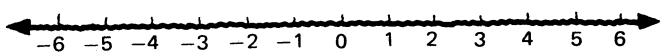
*Objetivos:* determinar en el plano cartesiano la distancia entre dos puntos, el punto que divide a un segmento de recta según una razón dada, el punto medio de un segmento, el ángulo formado por dos rectas concurrentes, la pendiente y el ángulo de inclinación de un segmento, y aplicar esos procedimientos a la resolución de problemas prácticos

| *Prerrequisitos*: | Bloque | Módulo(s) |
|---|---|---|
| • Nociones de teoría de conjuntos | 1 | 1 |
| • Número real (concepto y representación gráfica) | 1 | 12 |
| • Manejo de números | | |
| – enteros | 1 | 4 |
| – fraccionarios | 1 | 11 |
| – irracionales (radicales) | 1 | 13 |
| • Razón (concepto y manejo) | - | - |
| • Resolución de ecuaciones de primer grado | 2 | 1 |
| • Gráficas cartesianas (concepto y manejo) | 2 | 7 |
| • Propiedades geométricas de segmentos, ángulos, triángulos y además polígonos convexos | 4 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 |
| • Las razones trigonométricas de un ángulo agudo | 5 | 1 |
| • El círculo trigonométrico y las funciones trigonométricas directas o inversas | 5 | 3, 4, 5 |
| • Identidades y ecuaciones trigonométricas | 5 | 6, 8 |

## 1.1

## Distancia entre dos puntos en la recta real

1

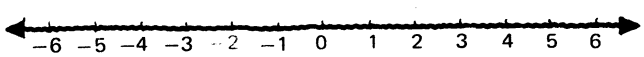



Recordemos
que
esta es

**una representación gráfica de** $\mathbb{R}$
(conjunto de los números reales).

Se le suele llamar también
**eje numérico real** o **recta real.**

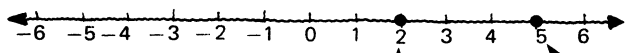
2




A cada número real
le corresponde
un **punto único** en esta recta real,
y
cada punto de la recta
es la representación
de un **número real único.**

3

Por ejemplo.




Este punto es la representación gráfica del número real **2.**

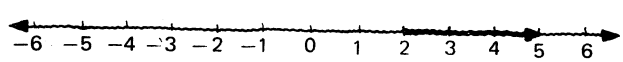
Y este punto es la representación gráfica del número real **5.**

4

A la **diferencia de los dos números reales**

**5 − 2 = 3**

le llamaremos
**distancia dirigida de 2 a 5**
y la representaremos gráficamente así:




5

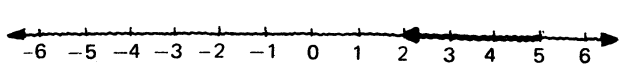
Similarmente, a la diferencia

2 − 5 = ⌊___⌋

le llamaríamos

⌊_____⌋

y la representaríamos gráficamente así:

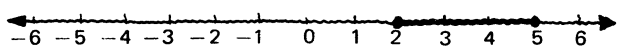



− 3

distancia dirigida de 5 a 2

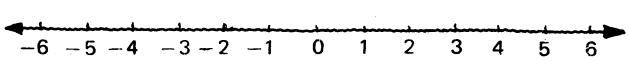
6

Al valor absoluto de la diferencia
$|5 - 2| = |2 - 5| = 3$
le llamaremos **distancia no dirigida** o simplemente **distancia de 2 a 5 o de 5 a 2,**
y
la representaremos gráficamente así:

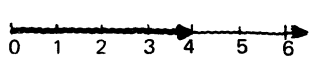



7

Por ejemplo, la **distancia dirigida de 0 a 4** es ⌊____⌋ = ⌊____⌋
y la representaremos gráficamente así:

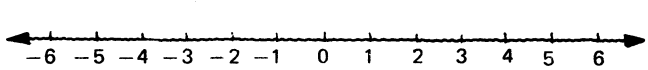



$4 - 0 = 4$

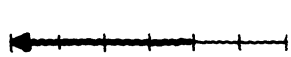



8

La **distancia dirigida de 4 a 0** es ⌊____⌋ = ⌊____⌋
y su representación gráfica es:

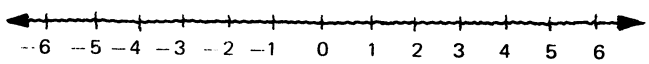



$0 - 4 = -4$

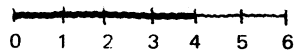


9

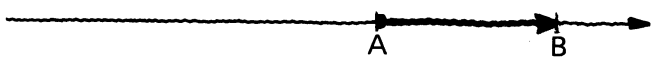
La **distancia** de 0 a 4 ó de 4 a 0 es ____ = ____ = ____
y se representa gráficamente así:




$|4 - 0| = |0 - 4| = 4$




10

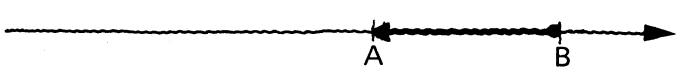



Si A y B representan dos números reales cualesquiera,
la distancia dirigida de A a B es igual a ____

y
la simbolizaremos así: $\overrightarrow{|AB|}$

$B - A$

11



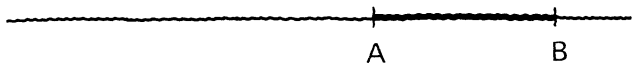

La distancia dirigida de B a A
es igual a ____

y la simbolizaremos, en forma similar, así: ____

$A - B$

$\overrightarrow{|BA|}$

12



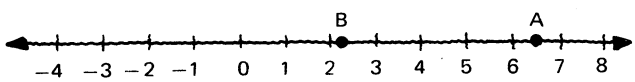

La distancia de A a B o de B a A
es igual a [ ] = [ ]

y la simbolizaremos así: $|\overleftrightarrow{AB}|$

Es la medida del segmento rectilíneo $\overline{AB}$ o $\overline{BA}$

- $|B - A|$
- $|A - B|$

13




A = 6.5
B = 2.3

$|\overrightarrow{AB}|$ = [ ]

$|\overrightarrow{BA}|$ = [ ]

$|\overleftrightarrow{AB}| = |\overleftrightarrow{BA}|$ = [ ]

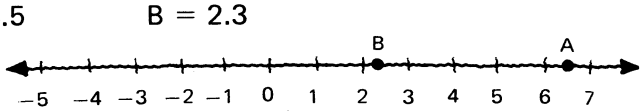
$2.3 - 6.5 = -4.2$

$6.5 - 2.3 = 4.2$

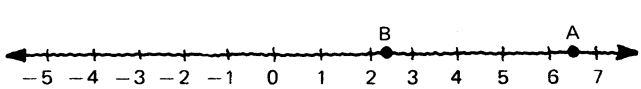
$|-4.2| = |4.2| = 4.2$

14

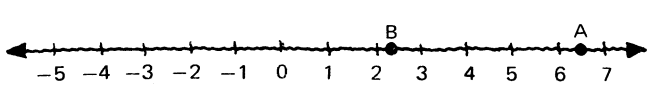
A = 6.5 B = 2.3



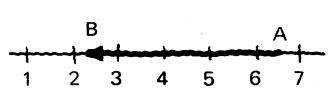

Representación gráfica de $|\overrightarrow{AB}|$

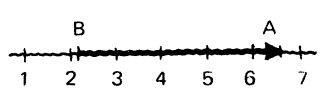


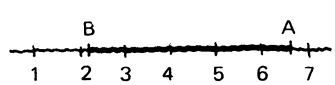

Representación gráfica de $|\overrightarrow{BA}|$



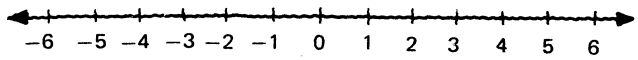

Representación gráfica de $|\overleftrightarrow{AB}| = |\overleftrightarrow{BA}|$



15




A = − 3
B = 2

$|\overrightarrow{AB}|$ = ____

$|\overrightarrow{BA}|$ = ____

$|\overleftrightarrow{AB}| = |\overleftrightarrow{BA}|$ = ____

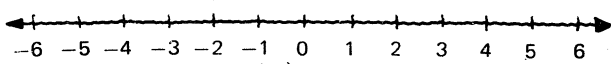
$2 - (-3) = 2 + 3 = 5$

$-3 - 2 = -5$

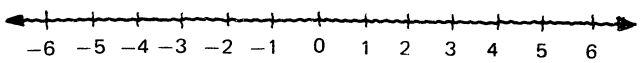
$|2 + 3| = |-3 - 2| = 5$

16

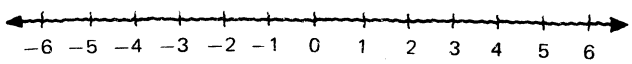
A = − 3 B = 2



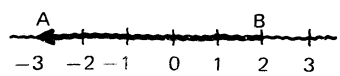

Representación gráfica de $|\overrightarrow{BA}|$

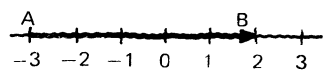


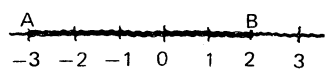

Representación gráfica de $|\overrightarrow{AB}|$



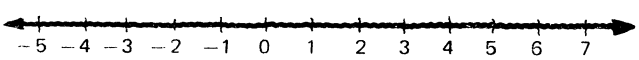

Representación gráfica de $|\overleftrightarrow{AB}| = |\overleftrightarrow{BA}|$




17




P = − 1
Q = − 3

$|\overrightarrow{PQ}|$ = ____

$|\overrightarrow{QP}|$ = ____

$|\overleftrightarrow{PQ}| = |\overleftrightarrow{QP}|$ = ____

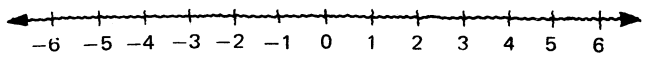
$-3 - (-1) = -3 + 1 = -2$

$-1 - (-3) = -1 + 3 = 2$

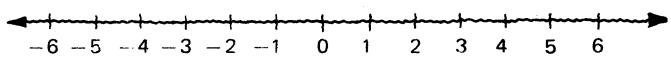
$|-3 + 1| = |-1 + 3| = 2$

18

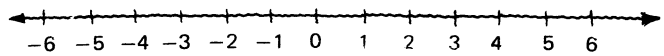
$P = -1 \qquad Q = -3$



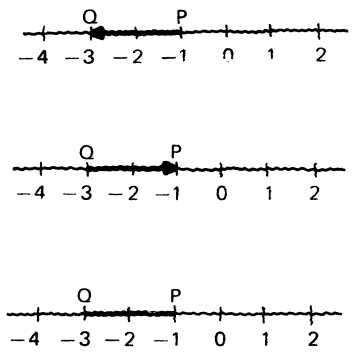

Representación gráfica de $|\overrightarrow{PQ}|$.



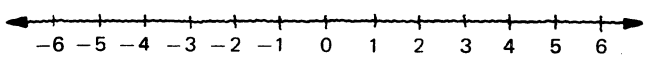

Representación gráfica de $|\overrightarrow{QP}|$.




Representación gráfica de $|\overleftarrow{PQ}| = |\overleftarrow{QP}|$.




19




$M = -3\,^3/_4$

$N = 1\,^1/_5$

$|\overrightarrow{MN}| =$ ⌊———————

$|\overrightarrow{NM}| =$ ⌊———————

$|\overleftarrow{MN}| = |\overleftarrow{NM}| =$ ⌊———————

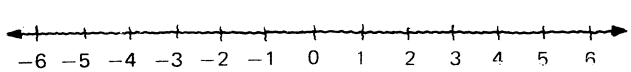
- $1\,^1/_5 - (-3\,^3/_4) = 1\,^1/_5 + 3\,^3/_4$

  $= \frac{6}{5} + \frac{15}{4} = \frac{24+75}{20} = \frac{99}{20}$

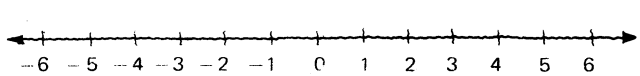
  $= 4\,^{19}/_{20}$
- $-3\,^3/_4 - 1\,^1/_5 = -4\,^{19}/_{20}$
- $|4\,^{19}/_{20}| = |-4\,^{19}/_{20}| = 4\,^{19}/_{20}$

20

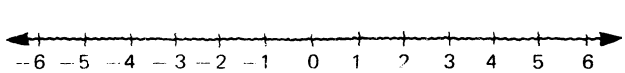
$M = -3\,^3/_4 \qquad N = 1\,^1/_5$



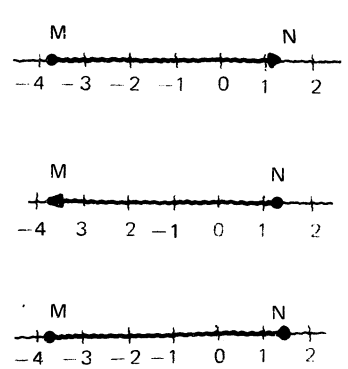

Representación gráfica de $|\overrightarrow{MN}|$



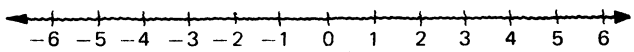

Representación gráfica de $|\overrightarrow{NM}|$




Representación gráfica de $|\overleftarrow{MN}| = |\overleftarrow{NM}|$



21




$R = -\sqrt{3}$

$S = 2$

$|\overrightarrow{RS}| =$ ⌊_____

$|\overrightarrow{SR}| =$ ⌊_____

$|\overleftarrow{RS}| = |\overleftarrow{SR}| =$ ⌊_____

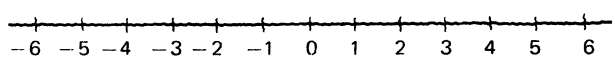
$2 - (-\sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3}$

$-\sqrt{3} - 2$

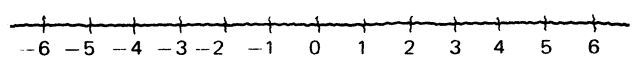
$|2 + \sqrt{3}| = |-\sqrt{3} - 2| = 2 + \sqrt{3}$

22

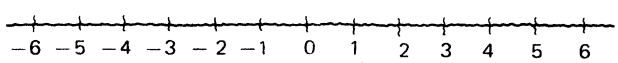
$R = -\sqrt{3}$ $S = 2$



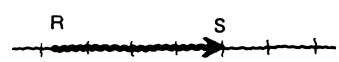

Representación gráfica de $|\overrightarrow{RS}|$

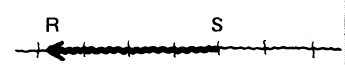


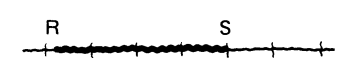

Representación gráfica de $|\overrightarrow{SR}|$.



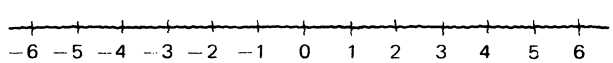

Representación gráfica de $|\overleftarrow{RS}| = |\overleftarrow{SR}|$.




23



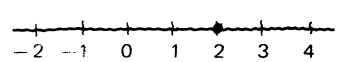

$T = 2$

$U = 2$

$|\overrightarrow{TU}| =$ ⌊_____

$|\overrightarrow{UT}| =$ ⌊_____

$|\overleftarrow{TU}| = |\overleftarrow{UT}| =$ ⌊_____




Distancia nula

$2 - 2 = 0$

$2 - 2 = 0$

$|2 - 2| = 0$

**6.1.1.1**

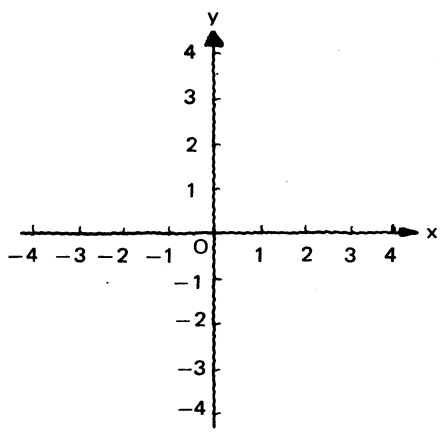
Práctica adicional
de
determinación de la distancia
(dirigida o no dirigida)
entre dos puntos dados en la recta real,
si se considera necesario.

24

Consideremos,
ahora,

**dos ejes reales perpendiculares entre sí,**

constituyendo
un
sistema de
coordenadas
cartesianas.

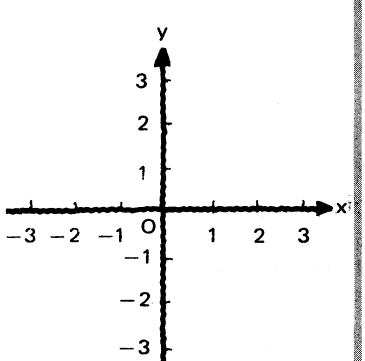



25

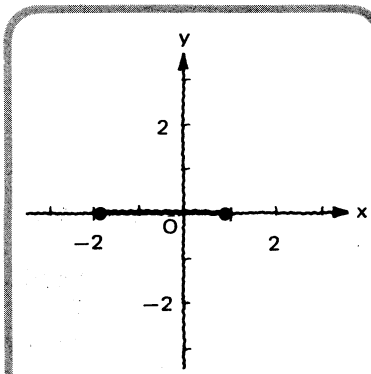
Si $x_1 = -2$

y $x_2 = 1$

- $|\overrightarrow{x_1 x_2}| =$ [ ] = [ ]
- $|\overrightarrow{x_2 x_1}| =$ [ ] = [ ]
- $|\overrightarrow{x_1 x_2}| = |\overrightarrow{x_2 x_1}| =$ [ ]




Representar gráficamente esta última distancia.




- $x_2 - x_1 = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3$
- $x_1 - x_2 = -2 - 1 = -3$
- $|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2| = 3$

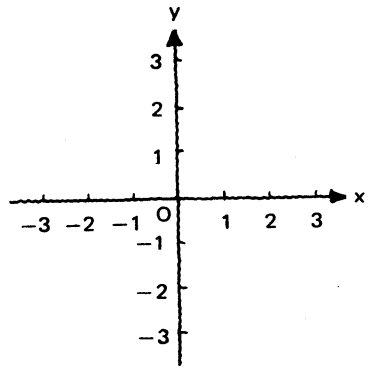
26

Ahora,
si $y_1 = -2$
e $y_2 = 2$

$|\overrightarrow{y_1 y_2}| = |\quad| = \quad$

$|\overrightarrow{y_2 y_1}| = |\quad| = \quad$

$|\overrightarrow{y_1 y_2}| = |\overrightarrow{y_2 y_1}| = \quad$




$2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

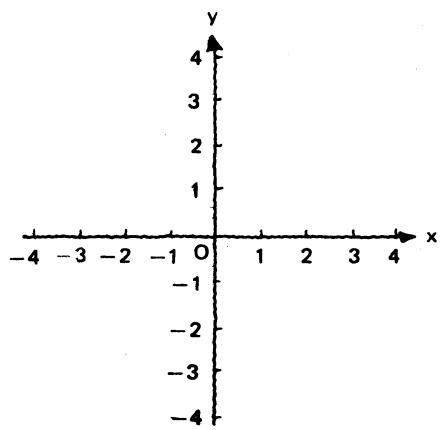
$-2 - 2 = -4$

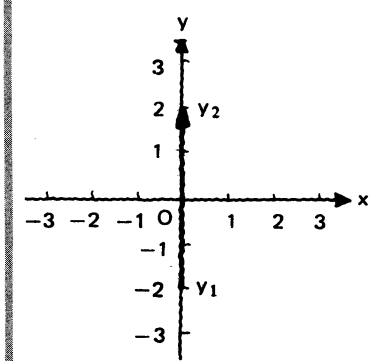
$|2 + 2| = |-2 - 2| = 4$

27

$y_1 = -2$
$y_2 = 2$

Representar gráficamente
$|\overrightarrow{y_1 y_2}| = 4$




**6.1.1.2**

**Práctica adicional,**
**si**
**se considera necesario.**

**6.1.1**

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* la distancia (dirigida o no dirigida) entre dos puntos dados en la recta real, expresándola 1) como una diferencia entre dos números reales, 2) como un número real positivo, negativo o nulo o, 3) como un segmento rectilíneo dirigido o no dirigido.

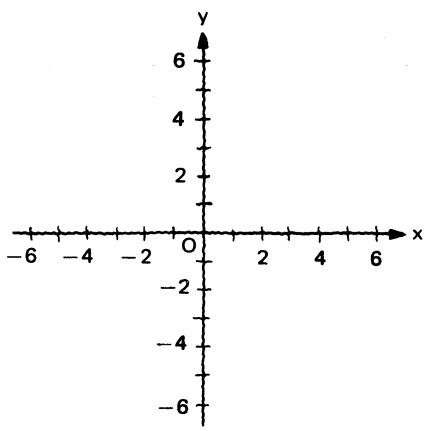
## 1.2

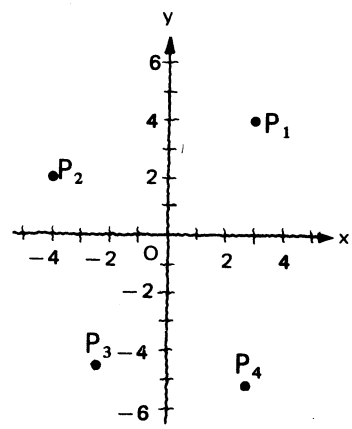
## Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano

28

En el plano cartesiano considerado, vamos a trazar los puntos correspondientes a los pares ordenados.

$P_1 = (3, 4)$
$P_2 = (-4, 2)$
$P_3 = (-2.5, -4.5)$
$P_4 = (2.7, -5.2)$

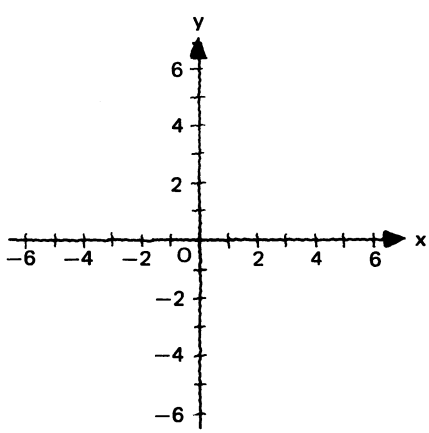


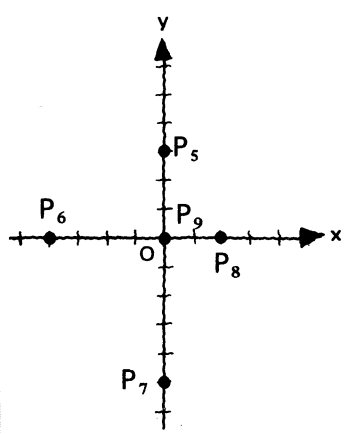




29

Tracemos ahora los puntos correspondientes a los pares ordenados.

$P_5 = (0, 3)$
$P_6 = (-4, 0)$
$P_7 = (0, -5)$
$P_8 = (2, 0)$
$P_9 = (0, 0)$

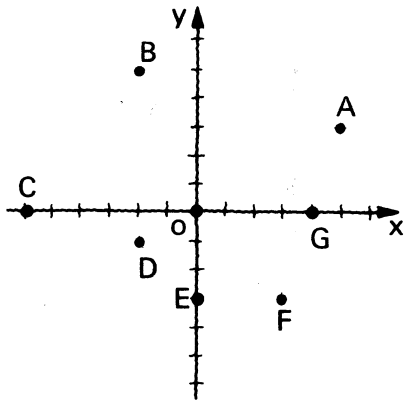


30

Demos los
pares ordenados
correspondientes
a los puntos
representados.

A = ⌊_____⌋
B = ⌊_____⌋
C = ⌊_____⌋
D = ⌊_____⌋
E = ⌊_____⌋
F = ⌊_____⌋
G = ⌊_____⌋
O = ⌊_____⌋




(5, 3)
(– 2, 5)
(– 6, 0)
(– 2, – 1)
(0, – 3)
(3, – 3)
(4, 0)
(0, 0)

**6.1.2.1**

Práctica adicional
de
representación de un punto
en el plano cartesiano,
correspondiente a un par ordenado dado,
y de
escritura del par ordenado
correspondiente a un punto dado
en el plano cartesiano,
si se considera necesario.

31

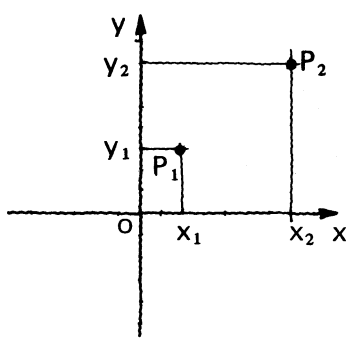
Vamos, ahora,
a
considerar
dos puntos,

$P_1 = (x_1, y_1)$

y

$P_2 = (x_2, y_2)$

en el
plano cartesiano.



32

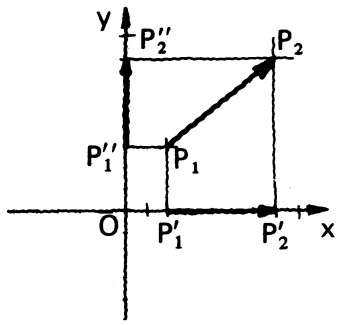
Consideremos el

segmento dirigido $\overrightarrow{P_1P_2}$

Llamaremos

proyecciones de $\overrightarrow{P_1P_2}$ a los segmentos dirigidos

$\overrightarrow{P_1'P_2'}$ y $\overrightarrow{P_1''P_2''}$.




33

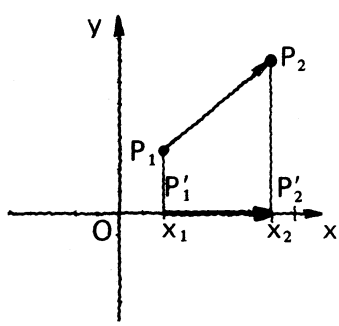
Al segmento dirigido $\overrightarrow{P_1'P_2'}$ le llamaremos

**la proyección en x**

del segmento dirigido $\overrightarrow{P_1P_2}$

Podemos escribir, en términos de $x_1$ y $x_2$:

$|\overrightarrow{P_1'P_2'}| =$ [ ]




$x_2 - x_1$

34

Al segmento dirigido

$\overrightarrow{P_1''P_2''}$

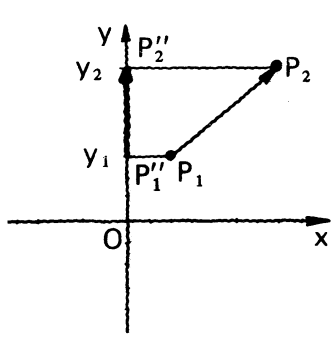
le llamaremos

**la proyección en y**

del segmento dirigido

$\overrightarrow{P_1P_2}$

$|\overrightarrow{P_1''P_2''}| =$ [ ]

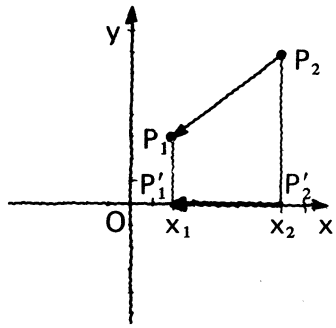



$y_2 - y_1$

35

Con referencia a la figura,
el segmento dirigido ⌊____⌋
es la proyección en x
del segmento dirigido $\overrightarrow{P_2P_1}$,
y su medida es la
distancia dirigida

⌊____⌋ = ⌊____⌋

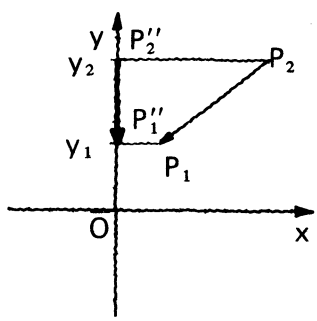



$\overrightarrow{P'_2P'_1}$

$|\overrightarrow{P'_2P'_1}| = x_1 - x_2$

36

⌊____⌋
es la proyección en ⌊__⌋
del segmento dirigido
⌊____⌋
y su medida
es la distancia dirigida
⌊____⌋ = ⌊____⌋




$\overrightarrow{P''_2P''_1}$
y
$\overrightarrow{P_2P_1}$

$|\overrightarrow{P''_2P''_1}| = y_1 - y_2$

37

Llamaremos

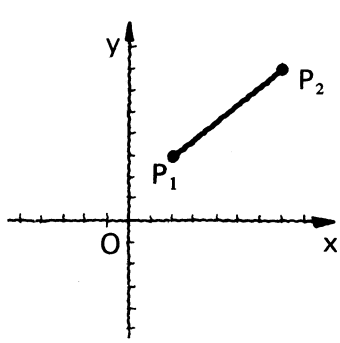
**distancia de $P_1$ a $P_2$**
**o de $P_2$ a $P_1$**

o bien,

**distancia entre $P_1$ y $P_2$**

a la medida
del segmento no dirigido $\overleftrightarrow{P_1P_2}$

y que simbolizaremos así: $|\overleftrightarrow{P_1P_2}|$



38

$\overrightarrow{P'_1P'_2}$ o $\overrightarrow{P'_2P'_1}$

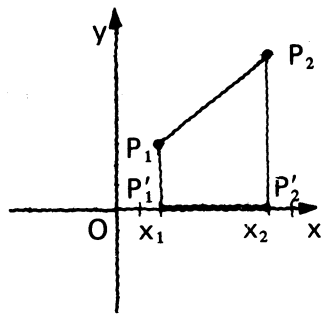
es la [ ]
del segmento no dirigido
[ ]

y su medida es la distancia

[ ] = [ ]

↓

[ ] = [ ]




proyección en x

$\overrightarrow{P_1P_2}$ o $\overrightarrow{P_2P_1}$

$|\overrightarrow{P'_1P'_2}| = |\overrightarrow{P'_2P'_1}|$

$|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$

39

[ ]

es la [ ]

del segmento [ ]
dirigido/no dirigido

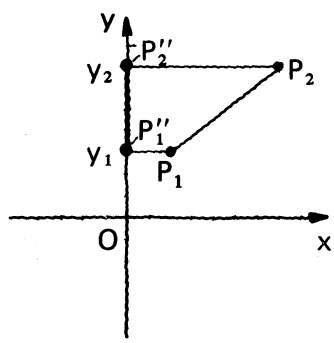
[ ]

y su medida es la distancia

[ ] = [ ]

↓

[ ] = [ ]




$\overrightarrow{P''_1P''_2}$ o $\overrightarrow{P''_2P''_1}$

proyección en y

no dirigido

$\overrightarrow{P_1P_2}$ o $\overrightarrow{P_2P_1}$

$|\overrightarrow{P''_1P''_2}| = |\overrightarrow{P''_2P''_1}|$

$|y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$

40

Sean los puntos A = (2, 3) y B = (6, 7), dar las siguientes

**proyecciones en x**

1. $|\overrightarrow{A'B'}|$ = [ ]
2. $|\overrightarrow{B'A'}|$ = [ ]
3. $|\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{B'A'}|$ = [ ]

- $x_B - x_A = 6 - 2 = 4$
- $x_A - x_B = 2 - 6 = -4$
- $|x_B - x_A| = |x_A - x_B| = |6 - 2| = |2 - 6| = 4$

41

$A = (2, 3)$ $B = (6, 7)$

Hacer la representación gráfica de:

$\overrightarrow{AB}$

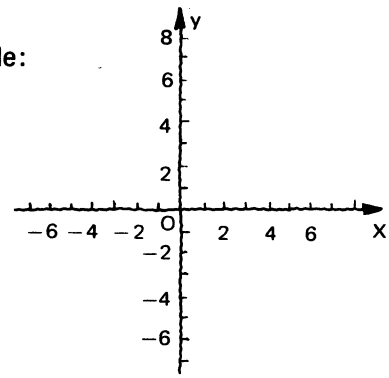
$\overrightarrow{A'B'}$

$\overrightarrow{BA}$

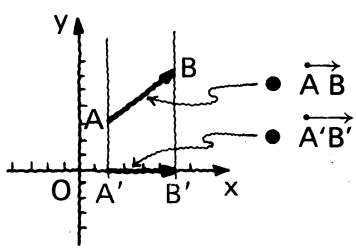
$\overrightarrow{B'A'}$

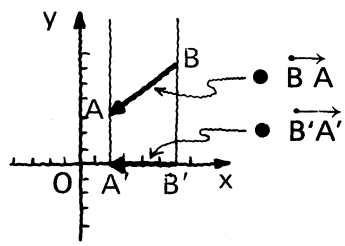
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

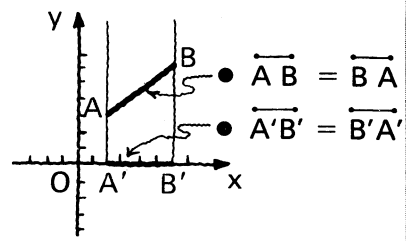
$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{B'A'}$




Respuesta en el cuadro siguiente




42

Sean los puntos $C = (-2, -3)$ y $D = (1, 4)$ dar las siguientes

**proyecciones en y.**

1. $|\overrightarrow{C''D''}| =$ [ ]
2. $|\overrightarrow{D''C''}| =$ [ ]
3. $|\overrightarrow{C''D''}| = |\overrightarrow{D''C''}| =$ [ ]

$y_D - y_C = 7$

$y_C - y_D = -7$

$|y_D - y_C| = |y_C - y_D| = 7$

43

C = (– 2, – 3)  D = (1, 4)

Representación gráfica de:

$\overrightarrow{CD}$

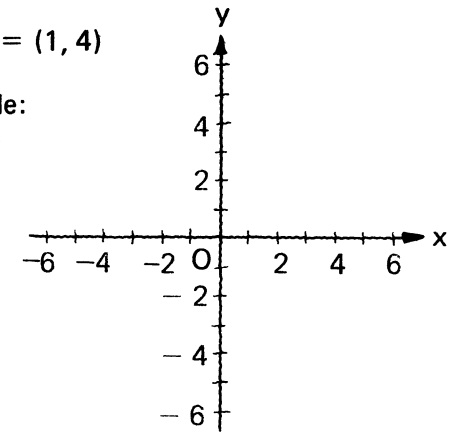
$\overrightarrow{C''D''}$

$\overrightarrow{DC}$

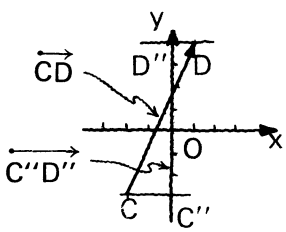
$\overrightarrow{D''C''}$

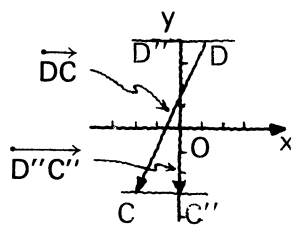
$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC}$

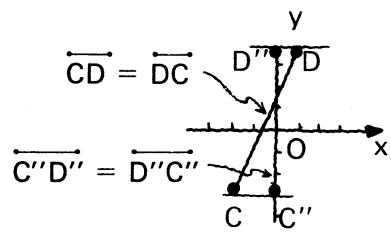
$\overrightarrow{C''D''} = \overrightarrow{D''C''}$




Respuesta
en el cuadro
siguiente




**6.1.2.2**

Práctica adicional
de determinación de las proyecciones
sobre los ejes coordenados
de un segmento
definido
por dos puntos dados,
si se considera necesario.

44

En este punto
pondremos especial atención en

**la distancia**

(no dirigida)

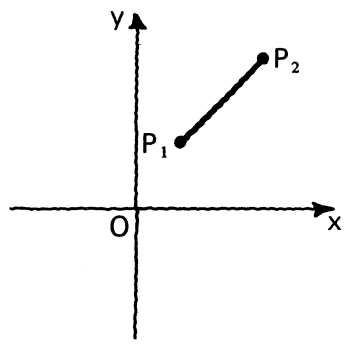
**entre dos puntos**

cualesquiera
del plano cartesiano.

45

Sean
$P_1 = (x_1, y_1)$
$P_2 = (x_2, y_2)$
dos puntos cualesquiera
del plano cartesiano.
Se requiere determinar

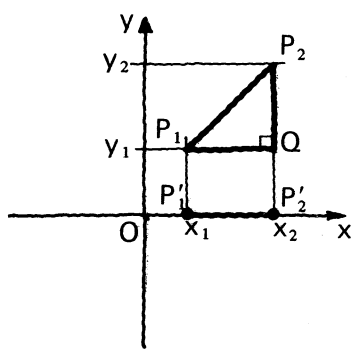
$|\overrightarrow{P_1 P_2}|$




46

Consideremos
el triángulo rectángulo
$P_1 P_2 Q$.
Podemos observar que

$|\overrightarrow{P_1 Q}| =$ ⌊_____⌋

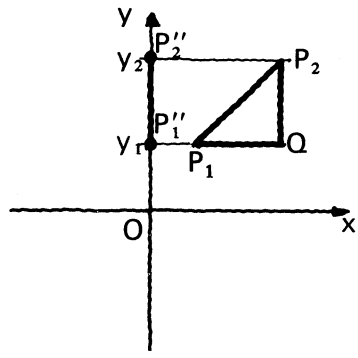



$|\overrightarrow{P'_1 P'_2}| = |\overrightarrow{P'_2 P'_1}|$
$= |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$

47

De manera similar,

$|\overrightarrow{QP_2}| =$ [ ]



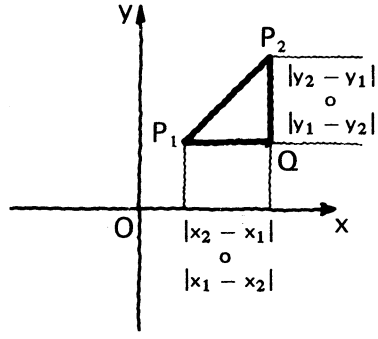

$|\overrightarrow{P_1''P_2''}| = |\overrightarrow{P_2''P_1''}|$

$= |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$

48

De acuerdo con Pitágoras:

[ ]




$|\overrightarrow{P_1P_2}|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$

o

$|\overrightarrow{P_1P_2}|^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2$

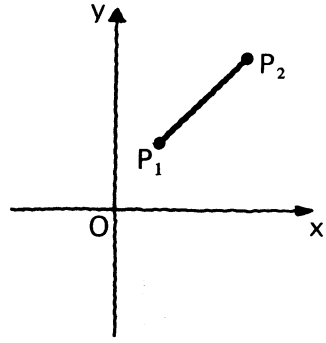
49

$|\overrightarrow{P_1P_2}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$|\overrightarrow{P_1P_2}| =$ [ ]

$=$ [ ]




$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$|\overrightarrow{P_1P_2}| < 0$ no satisface los requerimientos del problema planteado, por lo tanto, asignamos el signo + a los radicales.

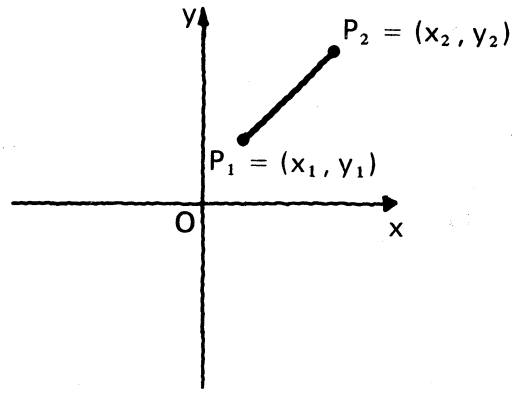
50

Entonces,
la distancia entre los
puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y
$P_2 = (x_2, y_2)$
está dada por

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

expresión en la cual
pueden intercambiarse los
índices de las variables
x e y.




51

Se requiere determinar
la distancia entre los puntos:

$P_1 = (2, 3)$ y $P_2 = (7, 7)$

Expresión general: [ ]

Sustitución de datos y operaciones:

[ ]

$|\overrightarrow{P_1P_2}| =$ [ ]

- $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
- $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(7-2)^2+(7-3)^2}$

$= \sqrt{5^2+4^2}$

$= \sqrt{25+9}$

$= \sqrt{34}$

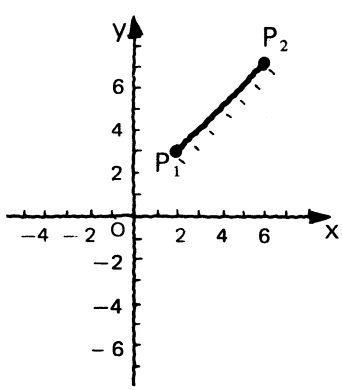
- $\sqrt{34} \doteq 5.83$

52

$P_1 = (2, 3)$
$P_2 = (7, 7)$

$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{34} \doteq 5.83$

Verificación gráfica.



53

Sean
A = (2, 0)
B = (5, 7)

Necesitamos conocer $|\overrightarrow{AB}|$.
Expresión general [ ]

Sustitución de datos
y operaciones:

[ ]

Distancia requerida: $|\overrightarrow{AB}|$ = [ ]

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(5 - 2)^2 + (7 - 0)^2}$$
$$= \sqrt{3^2 + 7^2}$$
$$= \sqrt{9 + 49}$$
$$\sqrt{58} \doteq 7.62$$

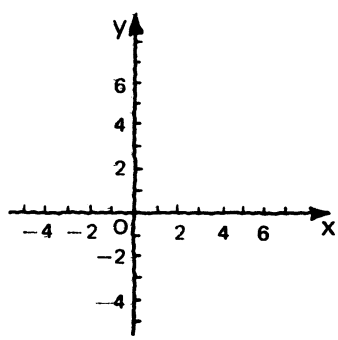
54

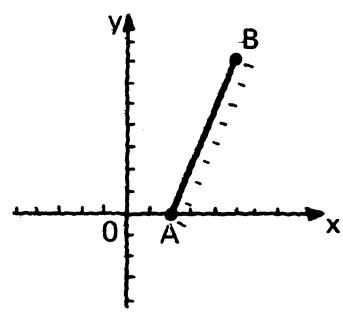
A = (2, 0)

B = (5, 7)

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{58} \doteq 7.62$

Verificación gráfica:




55

P = (8, 0)
Q = (0, 5)

Expresión general [ ]

Sustitución de datos
y operaciones:

[ ]

Distancia requerida: $|\overrightarrow{PQ}|$ = [ ]

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(0 - 8)^2 + (5 - 0)^2}$$
$$= \sqrt{(-8)^2 + (5)^2}$$
$$= \sqrt{64 + 25}$$
$$\sqrt{89} = 9.43$$

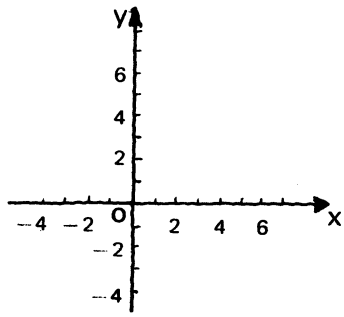
56

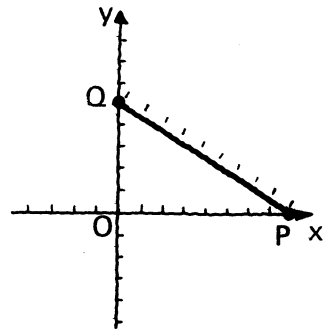
$P = (8, 0)$

$Q = (0, 5)$

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{89} \doteq 9.43$

Verificación gráfica:




**6.1.2.3**

Práctica adicional
de
determinación de la distancia
entre dos puntos dados
por sus coordenadas ($x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$)
si se considera necesario.

57

$C = (-5, 7)$

$D = (3, -2)$

Expresión general

$|\overrightarrow{CD}| =$

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2}$$
$$= \sqrt{[3 - (-5)]^2 + (-2 - 7)^2}$$
$$= \sqrt{(3 + 5)^2 + (-2 - 7)^2}$$
$$= \sqrt{8^2 + (-9)^2}$$
$$= \sqrt{64 + 81}$$

$\sqrt{145} \doteq 12.04$

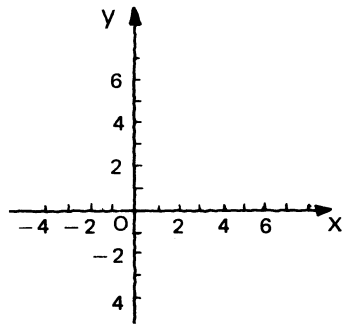
58

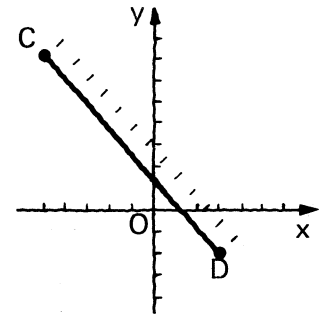
$C = (-5, 7)$

$D = (3, -2)$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{145} \doteq 12.04$

Verificar gráficamente.




59

$M = (-9, -1)$

$N = (-2, -4)$

Expresión general: $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(X_N - X_M)^2 + (Y_N - Y_M)^2}$

$= \sqrt{[-2-(-9)]^2 + [-4-(-1)]^2}$

$= \sqrt{7^2 + (-3)^2}$

$= \sqrt{49 + 9}$

$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{58} \doteq 7.62$

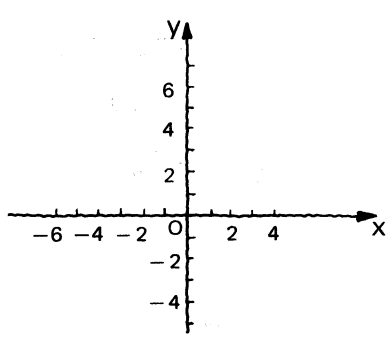
60

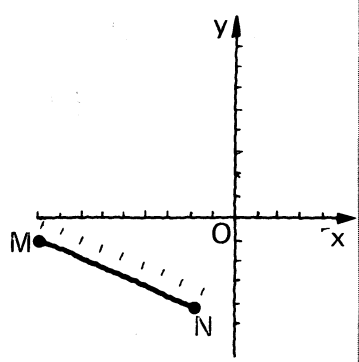
$M = (-9, -1)$

$N = (-2, -4)$

$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{58} \doteq 7.62$

Verificar gráficamente.



**6.1.2.4**

Práctica adicional
de
determinación de la distancia
entre dos puntos
dados por sus coordenadas
$[x, y \in \mathbb{R}]$,
si se considera necesario.

61

Ahora,
la distancia de un punto $P = (-2, -1)$
a un punto Q, cuya abscisa es igual a 1,
es igual a 5.

Se requiere
determinar la ordenada del punto Q.

62

Siendo
$P = (-2, -1)$

$Q = (1, y_Q)$

escribimos la expresión general para $|\overrightarrow{PQ}|$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

la cual se transforma en

$$5 = \sqrt{[1 - (-2)]^2 + [y_Q - (-1)]^2}$$

al sustituir los datos del problema.

$$5 = \sqrt{(1 + 2)^2 + (y_Q + 1)^2}$$

$$5 = \sqrt{9 + (y_Q + 1)^2}$$

63

Resulta esta ecuación:

$5 = \sqrt{9 + (y_Q + 1)^2}$

que podemos resolver para $y_Q$:

$y_Q =$ _____

Respuesta en el cuadro siguiente.

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$25 = 9 + (y_Q + 1)^2$$

Desarrollando el cuadrado del binomio del segundo miembro:

$$25 = 9 + (y_Q^2 + 2y_Q + 1)$$

Eliminando el paréntesis:

$$25 = 9 + y_Q^2 + 2y_Q + 1$$

Ordenando:

$$y_Q^2 + 2y_Q - 15 = 0$$

Resolviendo para $y_Q$, por medio de la "fórmula cuadrática":

$$y_Q = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2}$$

$$y_Q = \frac{-2 \pm 8}{2}$$

$y_{Q_1} = 3$

o

$y_{Q_2} = -5$

64

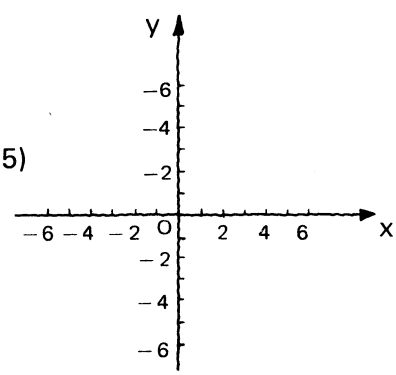
$P = (-2, -1)$

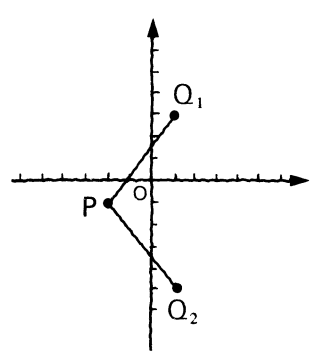
$Q = (1, y_Q)$

$\begin{cases} Q_1 = (1, 3) \\ Q_2 = (1, -5) \end{cases}$

$|\overrightarrow{PQ}| = 5$

Veamos esto gráficamente.




Observamos que cualquiera de los puntos ($Q_1$ o $Q_2$) satisface las condiciones del problema.

65

La distancia del origen
a un punto A, de ordenada 3,
es igual a 4.
Determinar la abscisa de A.

Ver cuadro siguiente:

66

Escribamos las coordenadas de los puntos dados:

O = [ ]

A = [ ]

y la expresión para $|\overrightarrow{OA}|$:

[ ]

- $(0, 0)$
- $(x_A, 3)$
- $4 = \sqrt{x_A^2 + 3^2}$

  o
- $4 = \sqrt{x_A^2 + 9}$

67

Resolviendo la ecuación resultante:

$$4 = \sqrt{x_A^2 + 9}$$

obtenemos: $x_A$ = [ ]

- $4 = \sqrt{x_A^2 + 9}$

  $16 = x_A^2 + 9$

  $x_A^2 = 16 - 9 = 7$

  $x_A = \pm\sqrt{7}$
- $x_{A_1} = \sqrt{7} \doteq 2.65$

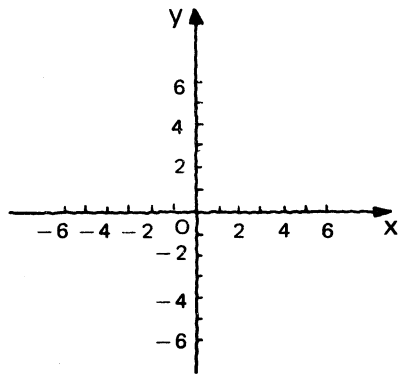
  $x_{A_2} = -\sqrt{7} \doteq -2.65$

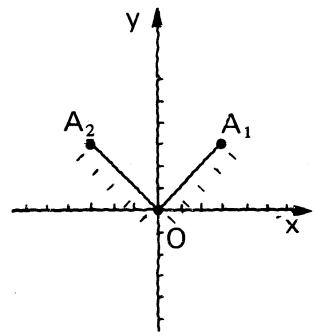
68

$O = (0, 0)$

$A = (x_A, 3)$ $\begin{cases} A_1 = (\sqrt{7}, 3) \\ A_2 = (-\sqrt{7}, 3) \end{cases}$

Representación gráfica:




Los dos puntos $(A_1, A_2)$ satisfacen las condiciones del problema.

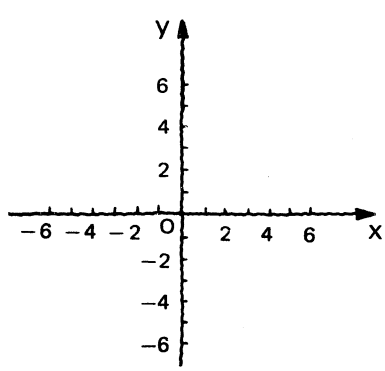
69

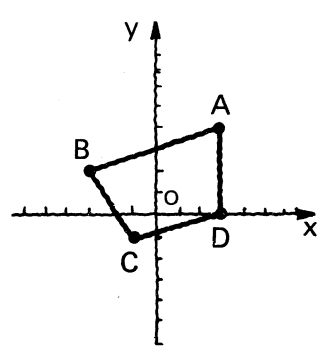
Los puntos $A = (3, 4)$, $B = (-3, 2)$, $C = (-1, -1)$ y $D = (3, 0)$ son los vértices de un cuadrilátero.

Determinar su perímetro.

70

Empecemos haciendo la representación gráfica del cuadrilátero ABCD.



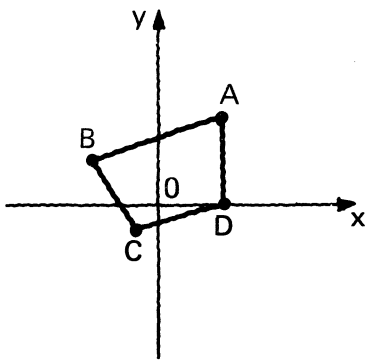



71

Sabemos que:

perímetro ABCD

= [ ]




$|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CD}| + |\overrightarrow{DA}|$

(sumandos dados en cualquier orden)

72

Podemos, ahora, determinar las medidas de los lados del cuadrilátero.

| | Expresión general | Resultado |
|---|---|---|
| $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ = | [ ] | = [ ] |
| $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ = | [ ] | = [ ] |
| $\lvert\overrightarrow{CD}\rvert$ = | [ ] | = [ ] |
| $\lvert\overrightarrow{DA}\rvert$ = | [ ] | = [ ] |

Respuesta en el cuadro siguiente.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \doteq 6.32$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{13} \doteq 3.61$$

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{17} \doteq 4.12$$

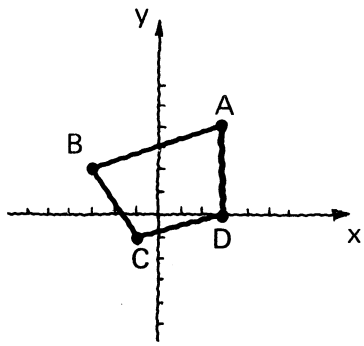
$$|\overrightarrow{DA}| = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = 4$$

Perímetro ABCD = [ ] $\doteq$ [ ]

$\sqrt{40} + \sqrt{13} + \sqrt{17} + 4 \doteq 18.05$

73

Verificar gráficamente las medidas de los lados.



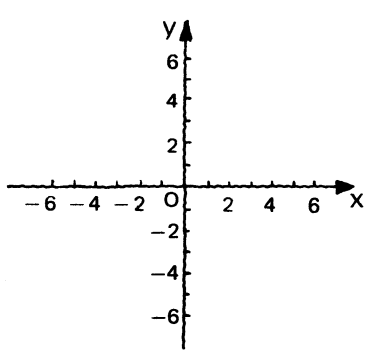

74

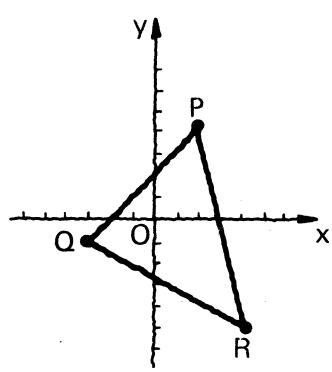
Los puntos P = (2,4), Q = (− 3, − 1) y R = (4, − 5) son los vértices de un triángulo.

Se requiere obtener el área de la región triangular PQR, utilizando la fórmula de Herón de Alejandría.

75

Representación gráfica del triángulo PQR.



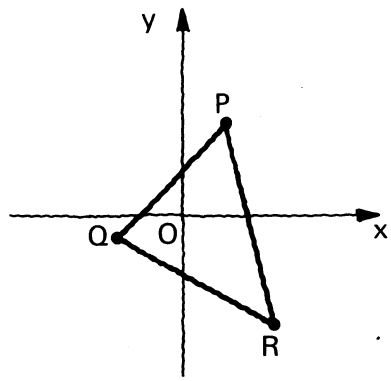



76

Recordemos la fórmula de Herón de Alejandría.

Área de la región triangular PQR

= [ ]




$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

en que a, b, c, son las medidas de los lados del triángulo y s es el semiperímetro

$s = \frac{a+b+c}{2}$

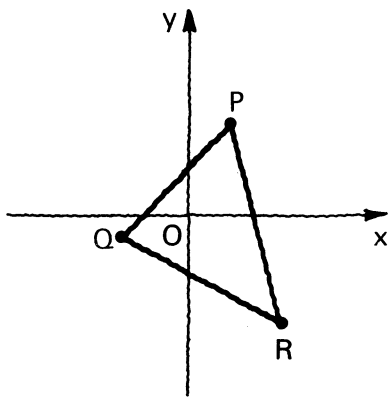
77

Es necesario, entonces, determinar las medidas de los lados.

$|\overrightarrow{PQ}|$ = [ ]

$|\overrightarrow{QR}|$ = [ ]

$|\overrightarrow{RP}|$ = [ ]




$\sqrt{50} \doteq 7.07$

$\sqrt{65} \doteq 8.06$

$\sqrt{85} \doteq 9.22$

78

$|\overrightarrow{PQ}| \doteq 7.07$

$|\overrightarrow{QR}| \doteq 8.06$

$|\overrightarrow{RP}| \doteq 9.22$

Semiperímetro s = [ ]

$\frac{7.07 + 8.06 + 9.22}{2}$

= 12.175

79

$|\overrightarrow{PQ}| \doteq 7.07$

$|\overrightarrow{QR}| \doteq 8.06$

$|\overrightarrow{RP}| \doteq 9.22$

$s = 12.175$

$s - |\overrightarrow{PQ}| =$ _____

$s - |\overrightarrow{QR}| =$ _____

$s - |\overrightarrow{RP}| =$ _____

Área ▲ PQR = _____ $\doteq$ _____

5.105

4.115

2.955

$\sqrt{12.175 \times 5.105 \times 4.115 \times 2.955}$

$= 27.49$

80

Sean los puntos: A = (0, 3), B = (– 1, – 6) y C = (4, – 1)

Queremos saber si el triángulo ABC es o no rectángulo.

81

Determinaremos
las medidas de los tres lados,
y
veremos si
se verifica el
teorema de Pitágoras.

82

$A = (0, 3), B = (-1, -6), C = (4, -1)$

$|\overrightarrow{AB}| =$ ____

$|\overrightarrow{BC}| =$ ____

$|\overrightarrow{CA}| =$ ____

$\sqrt{82}$

$\sqrt{50}$

$\sqrt{32}$

83

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{82}, \ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{50}, \ |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{32}$

**Se verifica/no se verifica** el teorema de Pitágoras.

Si el $\triangle$ ABC fuera rectángulo, la hipotenusa tendría que ser $\overrightarrow{AB}$, que es el mayor de los lados; entonces:

$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$

$(\sqrt{82})^2 = (\sqrt{50})^2 + (\sqrt{32})^2$

$82 = 50 + 32$

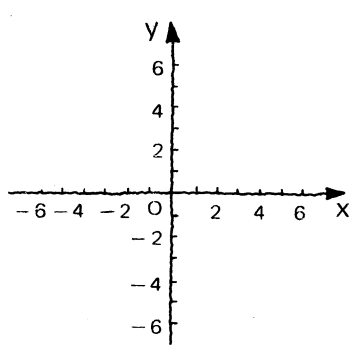
$82 = 82 \leftarrow$ PCV

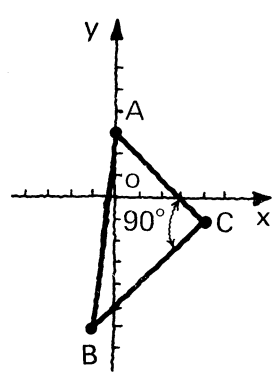
- **se verifica.**

PCV = proposición cerrada verdadera.
PCF = proposición cerrada falsa.

84

Representación gráfica.



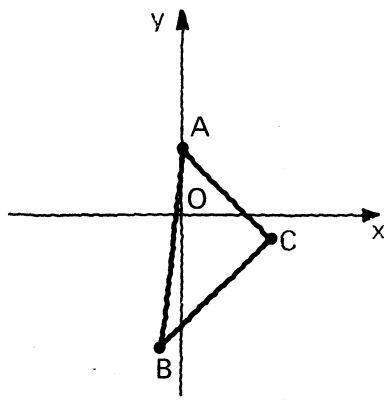

Ver cuadro siguiente.

85

Se verifica que

$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$

por lo tanto,
el $\triangle$ ABC es rectángulo.




**6.1.2.5**

Práctica adicional
de aplicación de la fórmula

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

a la determinación de
perímetros y áreas
de polígonos,
si se considera necesario.

### 6.1.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* las proyecciones sobre los ejes coordenados, de un segmento definido por dos puntos dados;

- *obtener* la expresión:

  $$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

  para el cálculo de la distancia entre dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$;

- *aplicar* la fórmula anterior al cálculo de perímetros y áreas de polígonos;

- *demostrar* algunos hechos geométricos que involucran las medidas de los lados de un polígono dado por sus vértices.

1.3

## División de un segmento según una razón dada. Punto medio de un segmento

86

Recordemos
que
si

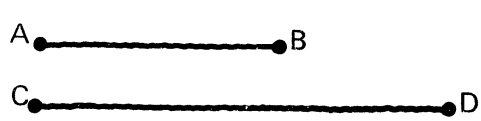
$\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$
representan
dos segmentos rectilíneos,

**la razón de $\overleftrightarrow{AB}$ a $\overleftrightarrow{CD}$**

es el cociente

$$\frac{|\overleftrightarrow{AB}|}{|\overleftrightarrow{CD}|}$$

87




La razón de $\overleftrightarrow{CD}$ a $\overleftrightarrow{AB}$
quedaría expresada
así:

$$\frac{|\overleftrightarrow{CD}|}{|\overleftrightarrow{AB}|}$$

**88**

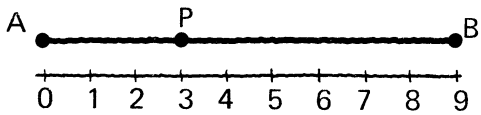
Consideremos, ahora,

el segmento $\overleftrightarrow{AB}$

y

un punto $P \in \overleftrightarrow{AB}$,

Podemos escribir:




$|\overleftrightarrow{AP}| = \square$ $|\overleftrightarrow{PB}| = \square$ $|\overleftrightarrow{AB}| = \square$

$\dfrac{|\overleftrightarrow{AP}|}{|\overleftrightarrow{AB}|} = \square$ $\dfrac{|\overleftrightarrow{PB}|}{|\overleftrightarrow{AB}|} = \square$ $\dfrac{|\overleftrightarrow{AP}|}{|\overleftrightarrow{PB}|} = \square$

$\dfrac{|\overleftrightarrow{AB}|}{|\overleftrightarrow{AP}|} = \square$ $\dfrac{|\overleftrightarrow{AB}|}{|\overleftrightarrow{PB}|} = \square$ $\dfrac{|\overleftrightarrow{AB}|}{|\overleftrightarrow{AB}|} = \square$

•3 •6 •9

• $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ • $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ • $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

• $\frac{9}{3} = 3$ • $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ • $\frac{9}{9} = 1$

**89**

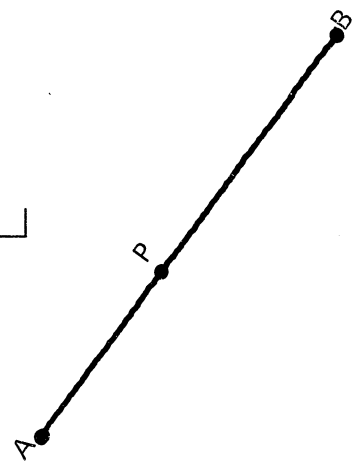
Observamos que

siempre se verifica esto:

$$\frac{|\overleftrightarrow{AP}|}{|\overleftrightarrow{AB}|} + \frac{|\overleftrightarrow{PB}|}{|\overleftrightarrow{AB}|} = \square$$

puesto que:

$\square$




1

$$\frac{|\overleftrightarrow{AP}|}{|\overleftrightarrow{AB}|} + \frac{|\overleftrightarrow{PB}|}{|\overleftrightarrow{AB}|} = \frac{|\overleftrightarrow{AP}| + |\overleftrightarrow{PB}|}{|\overleftrightarrow{AB}|}$$

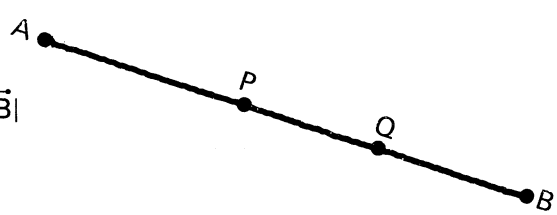
$$= \frac{|\overleftrightarrow{AB}|}{|\overleftrightarrow{AB}|} = 1$$

**90**

Se tiene que

$|\overleftrightarrow{AP}| = |\overleftrightarrow{PQ}| = |\overleftrightarrow{QB}|$

entonces,




$\dfrac{|\overleftrightarrow{AP}|}{|\overleftrightarrow{AB}|} = \square$ $\dfrac{|\overleftrightarrow{AQ}|}{|\overleftrightarrow{AB}|} = \square$ $\dfrac{|\overleftrightarrow{QB}|}{|\overleftrightarrow{AB}|} = \square$

$\dfrac{|\overleftrightarrow{AP}|}{|\overleftrightarrow{PB}|} = \square$ $\dfrac{|\overleftrightarrow{AQ}|}{|\overleftrightarrow{QB}|} = \square$

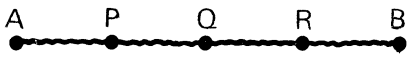
• $\frac{1}{3}$ • $\frac{2}{3}$ • $\frac{1}{3}$

• $\frac{1}{2}$ • $\frac{2}{1} = 2$

91

Ahora:

$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{QR}| = |\overrightarrow{RB}|$




luego:

$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} = ___$ $\frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{AB}|} = ___$ $\frac{|\overrightarrow{AR}|}{|\overrightarrow{AB}|} = ___$ $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|} = ___$

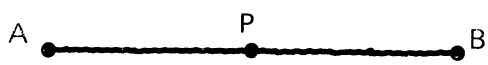
$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = ___$ $\frac{|\overrightarrow{AQ}|}{|\overrightarrow{QB}|} = ___$ $\frac{|\overrightarrow{AR}|}{|\overrightarrow{RB}|} = ___$

- $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ 1
- $\frac{1}{3}$ 1 3

92

Sabemos que

$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{PB}|$



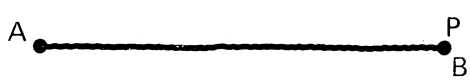

entonces,

$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} = ___$ $\frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{AB}|} = ___$ $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|} = ___$

$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = ___$ $\frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{AP}|} = ___$

- $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 1
- 1 1

93




P = B

$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} = ___$

$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = _____$

1

no se define puesto que

$|\overrightarrow{PB}| = 0$

**6.1.3.1**

Práctica adicional
de
determinación de la razón
de las medidas de
dos segmentos no dirigidos dados,
si se considera necesario.

94

¡Atención!

Consideremos
ahora
el

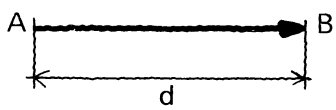
**segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$**

tal que

$|\overrightarrow{AB}| = |d|$
y
convengamos en que,

**si $|\overrightarrow{AB}| = d$ entonces $|\overrightarrow{BA}| = -d$**

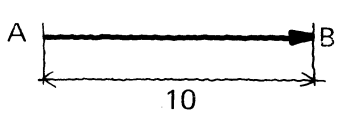
**$d \in \mathfrak{R}$**




95

Por ejemplo,

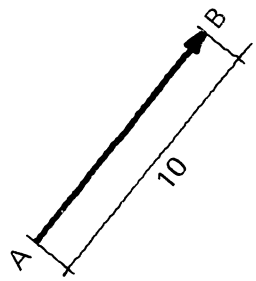
si $|\overrightarrow{AB}| = 10$
entonces,
$|\overrightarrow{BA}| =$ ____




$-10$

96

Si $|\overrightarrow{AB}| = -10$
entonces
$|\overrightarrow{BA}| =$ [ ]
Por otro lado, hemos aceptado que
$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| =$ [ ]




$-(-10) = 10$

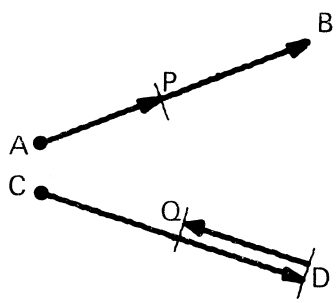
$|-10| = |10| = 10$

97

Sigamos estudiando con mucha atención

En relación con la figura,
si $|\overrightarrow{AB}| > 0$
entonces
$|\overrightarrow{AP}|$ [ ] 0
$> \text{ó} <$

si $|\overrightarrow{CD}| > 0$
entonces
$|\overrightarrow{DQ}|$ [ ] 0
$> \text{ó} <$

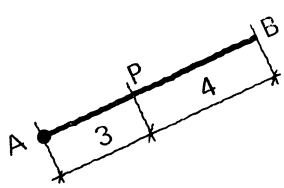



$>$

$<$

98

Por ejemplo:




$\dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} =$ [ ] $\qquad \dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} =$ [ ]

en ambos casos, los dos segmentos dirigidos tienen el mismo signo

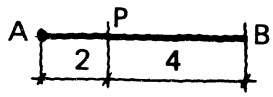
• $\frac{3}{7}$ • $\frac{3}{4}$

**99**

¡Atención!

$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \square$ $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{BA}|} = \square$

$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{BP}|} = \square$ $\frac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \square$



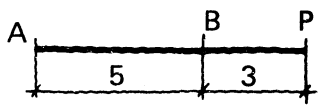

$\bullet \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \bullet -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

$\bullet -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \bullet -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

**100**

$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \square$

$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \square$



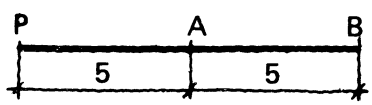

$-\frac{8}{3}$

$\frac{8}{5}$

**101**

$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \square$

$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \square$




$-\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$

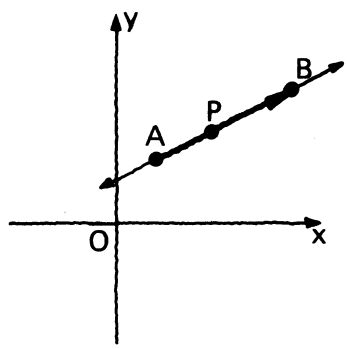
$-\frac{5}{5} = -1$

**6.1.3.2**

Práctica adicional
de
determinación de la razón de
las medidas de
dos segmentos dirigidos dados,
si se considera necesario.

102

Consideraremos, ahora,
dos puntos en el plano
cartesiano:
$A = (x_A, y_A)$
y
$B = (x_B, y_B)$
que definen
el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$,
y
otro punto, $P = (x_P, y_P)$
tal que $P \in \overleftrightarrow{AB}$*.




* Recordemos que $\overleftrightarrow{AB}$ simboliza a la recta AB.

103

Denotemos con **r**

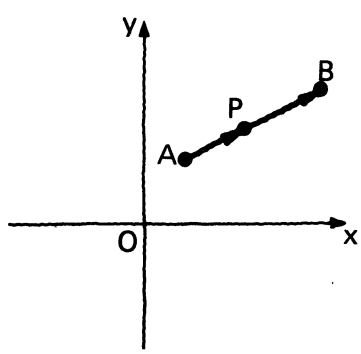
**la**

**razón del segmento**

$\overrightarrow{AP}$ **al segmento** $\overrightarrow{PB}$.

Es decir:

$r = \frac{\square}{\square}$

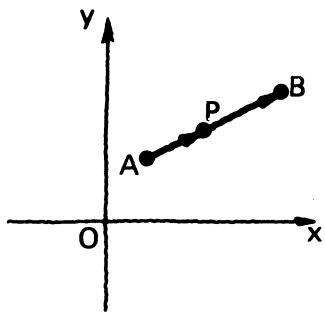



$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}$

104

$$r = \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}$$

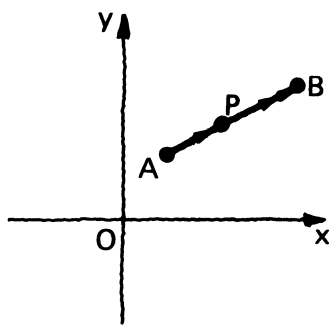
Decimos que
el punto **P**
divide al segmento $\overrightarrow{AB}$
según la razón **r**.




105

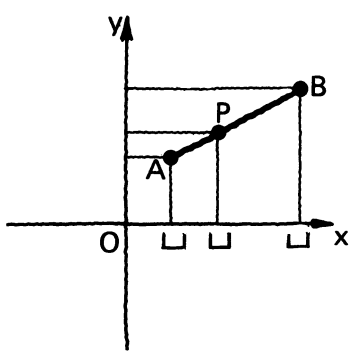
Nos propondremos,
entonces,
obtener una o varias expresiones
que nos permitan
determinar **P**
(es decir: $x_P$ e $y_P$)
a partir de A, B y r.
(es decir de: $x_A$, $y_A$;

$x_B$, $y_B$; y $r = \left(\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}\right)$




106

Rotulemos.




• $x_A$ • $x_P$ • $x_B$

107

Trazando

$\overleftrightarrow{PE} \parallel \overleftrightarrow{OX}$

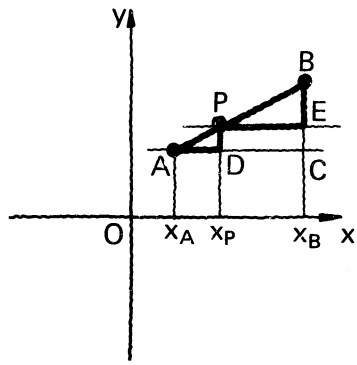
$\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{OX}$

obtenemos el par de triángulos rectángulos APD y PBE que

**son/no son**

semejantes

porque [ ]




son

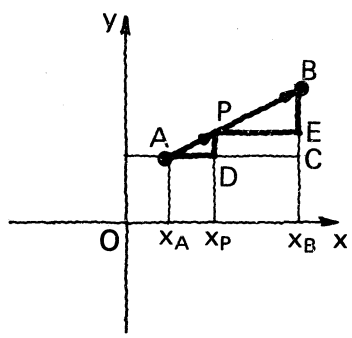
por ejemplo:

tienen sus tres lados respectivamente paralelos.

108

Si $\Delta APD \cong \Delta PBE$ podemos establecer la siguiente proporción:

$$\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{PE}|} = \frac{[\quad]}{[\quad]}$$




- $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}$

(o desde luego: $\frac{|\overrightarrow{DP}|}{|\overrightarrow{EB}|}$ )

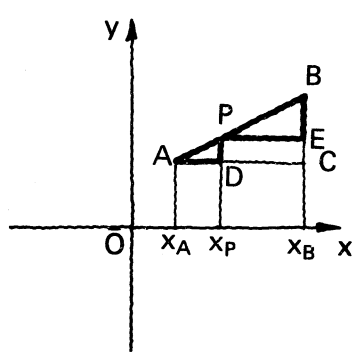
109

Tenemos

$$\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{PE}|} = \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}$$

pero hemos convenido que

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = [\quad]$$




r

110

Entonces,

$$\frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{PE}|} = r$$

o bien

$$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{PE}|\, r$$

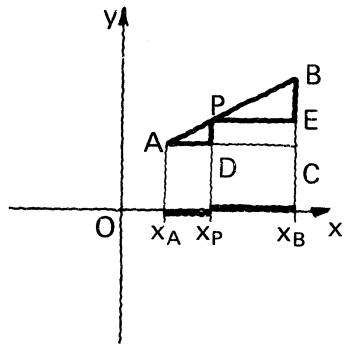
pero;

$|\overrightarrow{AD}| =$ [ ]

y

$|\overrightarrow{PE}| =$ [ ]

en términos de $x_A$, $x_P$ y $x_B$.




$x_P - x_A$

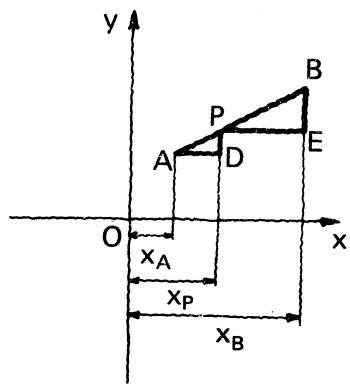
$x_B - x_P$

111

Por sustitución, obtenemos:

$x_P - x_A = r(x_B - x_P)$

de donde podemos despejar $x_P$:




$x_P =$ [ ]

$x_P - x_A = rx_B - rx_P$

$x_P + rx_P = x_A + rx_B$

$(1 + r)\, x_P = x_A + rx_B$

$$x_P = \frac{x_A + rx_B}{1 + r}$$

$$\frac{x_A + rx_B}{1 + r}$$

112

Hemos obtenido

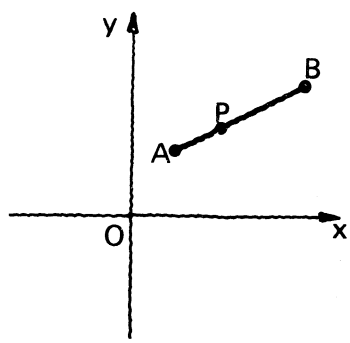
$$x_P = \frac{x_A + rx_B}{1 + r}$$

De manera similar, podemos obtener

$y_p$ en términos de $y_A$, $y_B$ y r.

Intentémoslo.

$y_P =$ [ ]




Respuesta en el cuadro siguiente.

**Puesto que $\triangle APD \cong \triangle PBE$**

$$\frac{|\overrightarrow{DP}|}{|\overrightarrow{EB}|} = \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = r$$

$$|\overrightarrow{DP}| = |\overrightarrow{EB}|\, r$$

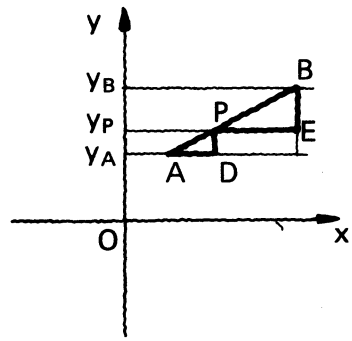
$$y_P - y_A = (y_B - y_P)r$$

$$y_P - y_A = y_B r - y_P r$$

$$y_P + y_P r = y_A + y_B r$$

$$(1 + r)\, y_P = y_A + y_B r$$

$$y_P = \frac{y_A + y_B r}{1 + r}$$




113

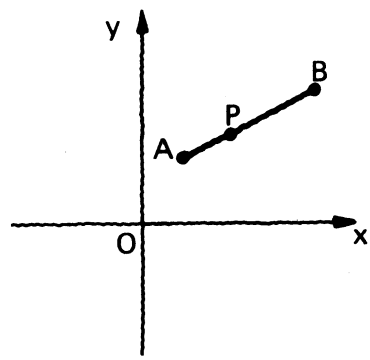
En resumen, tenemos

$A = (x_A, y_A)$
$B = (x_B, y_B)$

$r = |\overrightarrow{AP}| \,/\, |\overrightarrow{PB}|$

$P = (x_P, y_P)$

- $x_P = \dfrac{x_A + r x_B}{1 + r}$
- $y_P = \dfrac{y_A + r y_B}{1 + r}$




114

Por ejemplo,

se requiere determinar
el punto $P = (x_P, y_P)$
que divide al segmento $\overrightarrow{AB}$,
tal que $A = (2, 3)$ y $B = (8, 6)$

según la razón $r = \dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \dfrac{1}{2}$

115

$A = (2, 3),\ B = (8, 6),\ r = \frac{1}{2}$

Expresión general para $x_P$: ⌊_____⌋

Sustitución de datos y operaciones:

$x_P =$ ⌊__⌋

- $x_P = \frac{x_A + r x_B}{1 + r}$
- $x_P = \frac{2 + \frac{8}{2}}{1 + \frac{1}{2}}$

$x_P = \frac{\frac{4+8}{2}}{\frac{2+1}{2}} = \frac{12}{3}$

- 4

116

$A = (2, 3),\ B = (8, 6),\ r = \frac{1}{2}$

Expresión general para $y_P$: ⌊_____⌋

Sustitución de datos y operaciones:

$y_P =$ ⌊__⌋

- $y_P = \frac{y_A + r y_B}{1 + r}$
- $y_P = \frac{3 + \frac{6}{2}}{1 + \frac{1}{2}}$

$y_P = \frac{\frac{6+6}{2}}{\frac{2+1}{2}} = \frac{12}{3}$

- 4

117

$A = (2, 3)$

$B = (8, 6)$

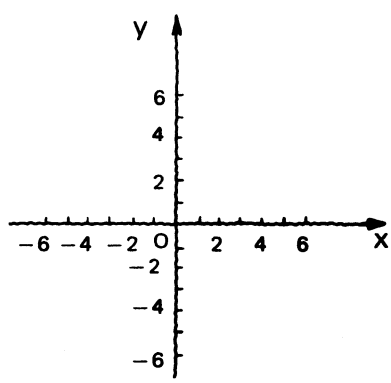
$r = |\overrightarrow{AP}|/|\overrightarrow{PB}| = \frac{1}{2}$

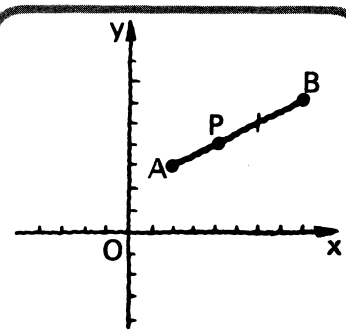
$x_P = 4$

$y_P = 4$

$P = (4, 4)$

Hagamos la representación gráfica de esto.




Vemos que, en efecto:

$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{1}{2}$

118

Los puntos

$A = (-1, 1)$
y
$B = (-4, -2)$

son los extremos de un segmento.
Se requiere determinar un tercer punto $P \in \overleftrightarrow{AB}$ tal que

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = -\frac{1}{2}$$

119

$A = (-1, 1)$ $B = (-4, -2)$ $r = -\frac{1}{2}$

Expresión general para $x_P$: ____

Sustitución de datos y operaciones:

$x_P =$ ____

- $x_P = \dfrac{x_A + rx_B}{1 + r}$

- $x_P = \dfrac{-1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-4)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)}$

$$x_P = \frac{-1+2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

- 2

120

$A = (-1, 1)$ $B = (-4, -2)$ $r = -\frac{1}{2}$

Expresión general para $y_P$: ____

Sustitución de datos y operaciones:

$y_P =$ ____

- $y_P = \dfrac{y_A + ry_B}{1 + r}$

- $y_P = \dfrac{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)}$

$$y_P = \frac{1+1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}}$$

- 4

121

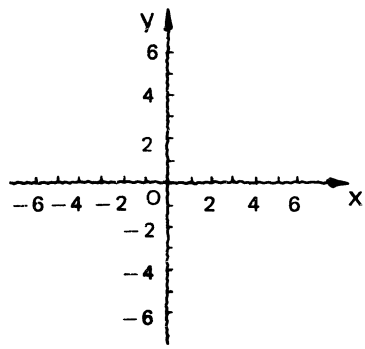
$A = (-1, 1)$

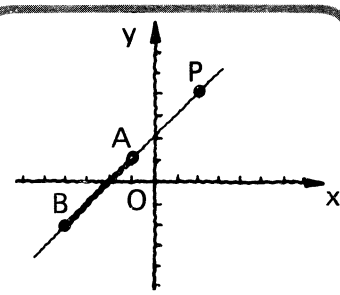
$B = (-4, -2)$

$r = -\frac{1}{2}$

$P = (2, 4)$

Representación gráfica




Vemos que

$P \in \overleftrightarrow{AB}$ y

$r = |\overrightarrow{AP}| / |\overrightarrow{PB}| = -\frac{1}{2}$

puesto que $|\overrightarrow{AP}|$ y $|\overrightarrow{PB}|$ tienen signos contrarios, según lo convenido.

122

Sabiendo que

$A = (-5, -4)$

$B = (1, -3)$

encontrar

$P = (x_P, y_P)$

de tal manera que

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = -1$$

123

$A = (-5, -4)$ $B = (1, -3)$

$r = |\overrightarrow{AP}|/|\overrightarrow{PB}| = -1$

Expresión general para $x_P$: _____

Sustitución de datos y operaciones:

- $x_P = \frac{x_A + r x_B}{1 + r}$

- $x_P = \frac{-5 + (-1)(1)}{1 + (-1)}$

$x_P = \frac{-5 - 1}{0} = \frac{-6}{0}$

- número no definido.

124

Debemos tener en cuenta que,

para $r = -1$

las expresiones para $x_P$ y $y_P$ no se definen;
por lo tanto,
debemos indicar la correspondiente **restricción en el dominio** de estas expresiones:

$$x_P = \frac{x_A + rx_B}{1 + r}$$

$$y_P = \frac{y_A + ry_B}{1 + r}$$

$x_A, x_B, y_A, y_B \in \mathcal{R}$
$r \in \mathcal{R} \wedge r \neq -1$

**6.1.3.3**

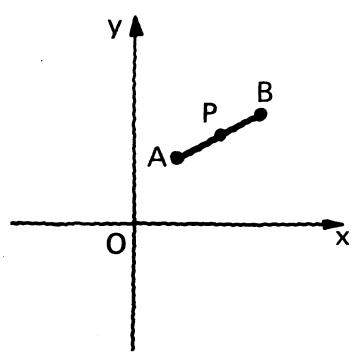
Práctica adicional
de
determinación del punto
que divide
a un segmento dado
según una razón dada,
si se considera necesario.

125

Ahora bien,

si P es el punto medio de $\overrightarrow{AB}$
(o de $\overrightarrow{BA}$, entonces, de $\overleftrightarrow{AB}$)
la razón r está dada por:

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{|\overrightarrow{BP}|}{|\overrightarrow{PA}|} = \frac{|\overleftrightarrow{AP}|}{|\overleftrightarrow{PB}|} = \boxed{\quad}$$




1

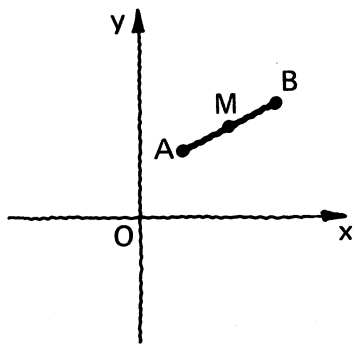
126

Siendo r = 1 y $x_M$ la abscisa del punto medio M, la expresión

$$x_P = \frac{x_A + rx_B}{1 + r}$$

se transforma en

$x_M$ = [ ]




$$\frac{x_A + x_B}{2}$$

127

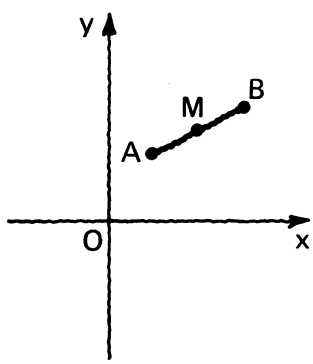
Similarmente, la expresión

$$y_P = \frac{y_A + ry_B}{1 + r}$$

se transforma en

$y_M$ = [ ]

en que $y_M$ es la ordenada del punto medio M.




$$\frac{y_A + y_B}{2}$$

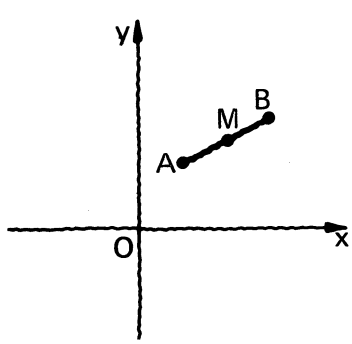
128

Entonces, si M es el punto medio de $\overrightarrow{AB}$:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$x_A, x_B, y_A, y_B \in \mathcal{R}$



129

Por ejemplo,
se quiere
determinar el punto medio $M = (x_M, y_M)$
del segmento $\overleftrightarrow{AB}$, tal que:

$A = (2, 3)$

y

$B = (6, 5)$

$x_M =$ ⌊_____⌋
$y_M =$ ⌊_____⌋
} $M =$ ( ⌊___⌋ , ⌊___⌋ )

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$$

•4
•4
} •4 •4

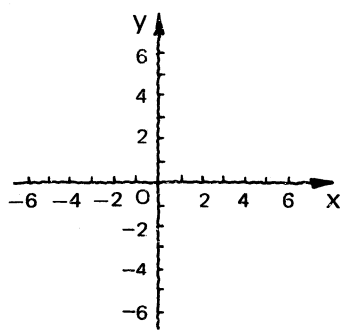
130

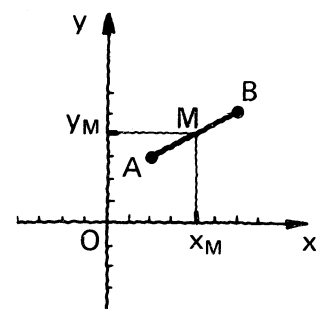
$A = (2, 3)$

$B = (6, 5)$

$M = (4, 4)$

Representación gráfica.




131

Determinar el punto medio
del segmento
cuyos extremos son

$A = (4, -3)$

y

$B = (-3, 7)$

$x_M =$ ⌊_____⌋
$y_M =$ ⌊_____⌋
} $M =$ ⌊_____⌋

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4 + (-3)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2$$

• $\frac{1}{2}$
• 2
} • $M = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

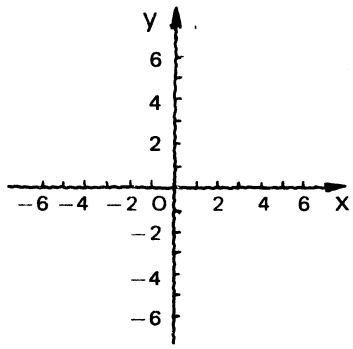
132

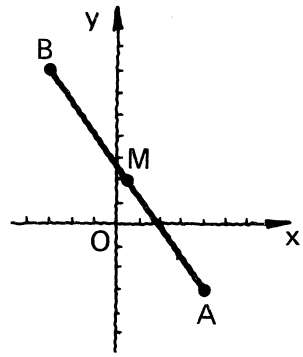
$A = (4, -3)$

$B = (-3, 7)$

$M = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

Representación gráfica.




Vemos que

$|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{MB}|$

**6.1.3.4**

Práctica de
aplicación
de las expresiones:

$$x_P = \frac{x_A + rx_B}{1 + r} \quad y \quad y_P = \frac{y_A + ry_B}{1 + r}$$

a la resolución de problemas que
involucren la división de un segmento
según una razón dada.

**6.1.3.5**

Práctica de
aplicación
de las expresiones:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad y \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

a la resolución de problemas que
involucren la determinación
del punto medio de un segmento.

**6.1.3**

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* la razón de las medidas de dos segmentos dirigidos o no dirigidos,
- *obtener* las expresiones:

$$x_P = \frac{x_A + rx_B}{1 + r}$$

y

$$y_P = \frac{y_A + ry_B}{1 + r}$$

para las coordenadas de un punto P, que divide a un segmento según la razón r;

- *obtener* las expresiones:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

para las coordenadas del punto medio M de un segmento $\overrightarrow{AB}$;

- *aplicar* las expresiones anteriores a la resolución de problemas que involucren la división de un segmento según una razón dada.

## 1.4

## Pendiente y ángulo de inclinación de una recta

133

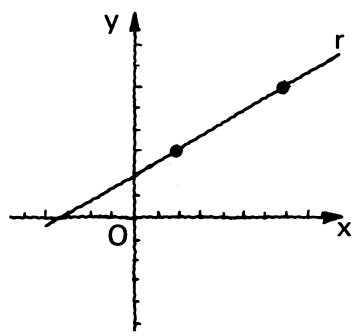
Consideremos dos puntos distintos sobre la recta r.

Por ejemplo:

$P_1 = (2, 3)$

y

$P_2 = (7, 6)$




134

$P_1 = (2, 3)$

$P_2 = (7, 6)$

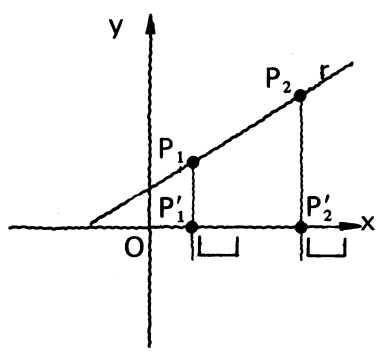
Si trazamos:

$\overleftrightarrow{P_1 P_1'} \perp \overleftrightarrow{Ox}$

y

$\overleftrightarrow{P_2 P_2'} \perp \overleftrightarrow{Ox}$

podemos rotular




• $x_1$ • $x_2$

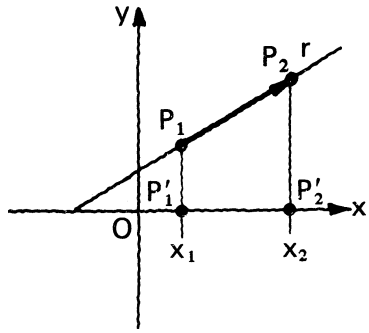
135

$P_1 = (2, 3)$ $P_2 = (7, 6)$

La proyección sobre el eje de las x del segmento $\overrightarrow{P_1P_2}$ es el segmento [ ] cuya medida es

$|\overrightarrow{P_1'P_2'}| =$ [ ]

[ ]




- $|\overrightarrow{P_1'P_2}|$
- $x_2 - x_1$
- $7 - 2 = 5$

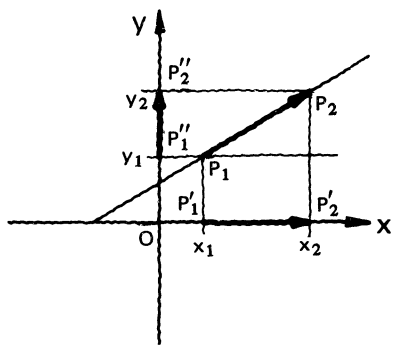
136

$P_1 = (2, 3)$ $P_2 = (7, 6)$

De manera similar, la proyección sobre el eje de las y del segmento $\overrightarrow{P_1P_2}$ es el segmento [ ] cuya medida es:

[ ] = [ ]

[ ]




$\overrightarrow{P_1''P_2''}$

- $|\overrightarrow{P_1''P_2''}|$
- $y_2 - y_1$

$6 - 3 = 3$

137

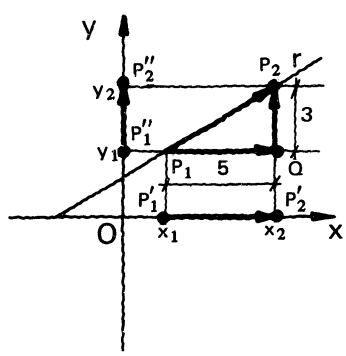
Atención.

Decimos que la razón:

$$\frac{|\overrightarrow{P_1''P_2''}|}{|P_1'P_2'|} = \frac{|\overrightarrow{QP_2}|}{|\overrightarrow{P_1Q}|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{5}$$

es

**la pendiente de la recta r.**

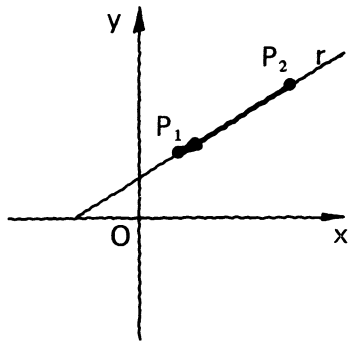


138

Sigamos considerando la recta r y los mismos dos puntos:

$P_1 = (2, 3)$ y $P_2 = (7, 6)$;

pero ahora tomemos el segmento $\overrightarrow{P_2P_1}$

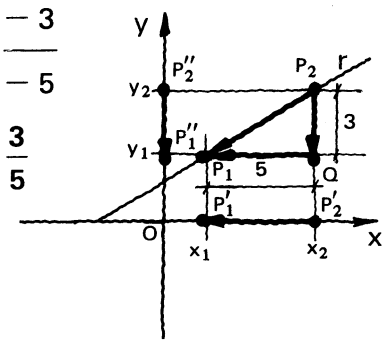



139

También decimos que

la razón

$$\frac{|\overrightarrow{P_2''P_1''}|}{|\overrightarrow{P_2'P_1'}|} = \frac{|\overrightarrow{P_2Q}|}{|\overrightarrow{P_1Q}|} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$




es

**la pendiente de la recta r.**

140

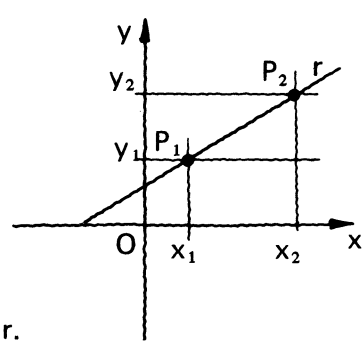
Entonces:

si $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$

son dos puntos distintos pertenecientes a la recta r, definiremos:

$$\mathbf{m} = \frac{y_2 - y_1^*}{x_2 - x_1}$$

siendo **m** la pendiente de la recta r.

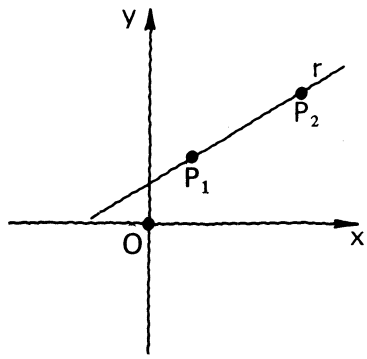


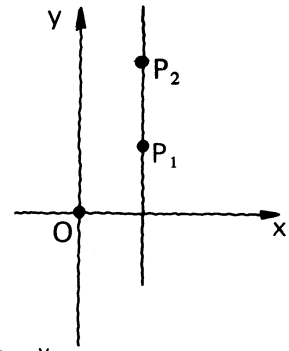

* Los índices de las variables x e y pueden ser intercambiados.

141

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Observemos esta expresión
y
veamos
si existe
alguna restricción
en los dominios
de las variables
involucradas.




$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ no se define para

$x_1 = x_2$

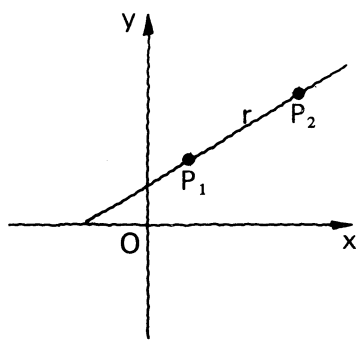
esto significa que no se define la pendiente de recta paralela al eje de las y

142

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$x_1 \neq x_2$

**m = pendiente de r.**




143

Sean

$P_1 = (2, 3)$

y

$P_2 = (7, 6)$

determinar la pendiente de $\overleftrightarrow{P_1 P_2}$

m = [ ] = [ ] = [ ]

expresión general

- $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ • $\frac{6 - 3}{7 - 2}$ = $\frac{3}{5}$

o también, desde luego:

- $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ • $\frac{3 - 6}{2 - 7}$ • $\frac{-3}{-5}$

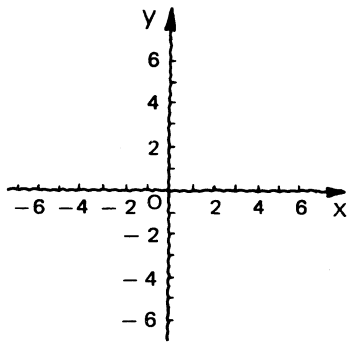
- $\frac{3}{5}$

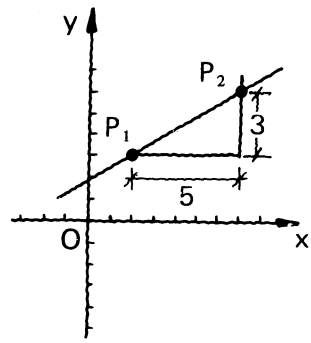
**144**

$P_1 = (2, 3)$

$P_2 = (7, 6)$

$m = \frac{3}{5}$




$m = \frac{3}{5}$

**145**

$P_1 = (-3, 5)$

$P_2 = (2, 5)$

determinar la pendiente de $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ :

$m = \underline{\quad} = \underline{\quad} = \underline{\quad}$

- $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- $\frac{5 - 5}{2 - (-3)}$
- $\frac{0}{5}$
- 0

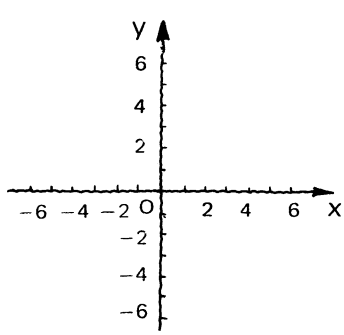
**146**

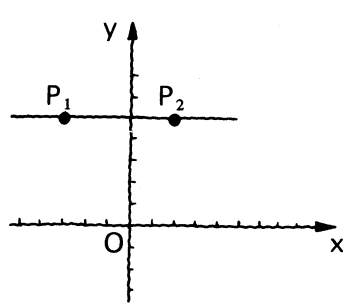
$P_1 = (-3, 5)$

$P_2 = (2, 5)$

$m = 0$

Representación gráfica.

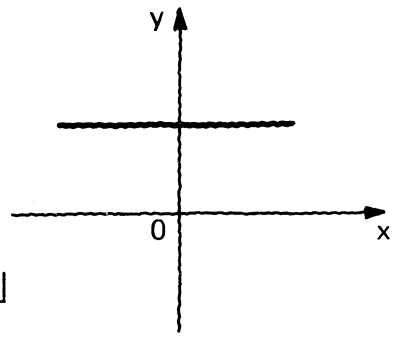


147

Podemos afirmar que la pendiente de una recta paralela al eje de las x es igual a [ ] porque

[ ]




- 0
- en la expresión

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

si la recta es paralela al eje de las x
$y_1 = y_2$
por lo que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$$

148

$P_1 = (-5, 7)$

$P_2 = (2, -1)$

la pendiente de $\overleftrightarrow{P_1 P_2}$ es

$m =$ [ ]

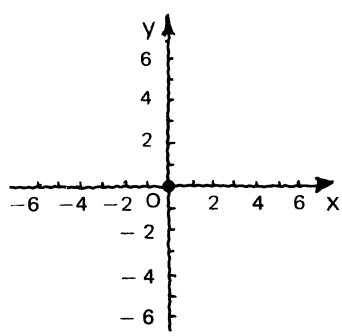
- $-\frac{8}{7}$

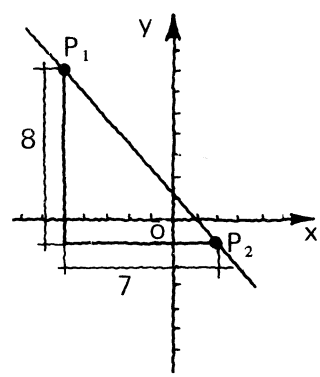
149

$P_1 = (-5, 7)$

$P_2 = (2, -1)$

$m = -\frac{8}{7}$




$m = -\frac{8}{7}$

150

$P_1 = (0, -3)$

$P_2 = (-5, 0)$

la pendiente de $\overleftrightarrow{P_1 P_2}$ es

$m =$ ⌊ ⌋

- $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-3)}{-5 - 0}$
- $= -\frac{3}{5}$

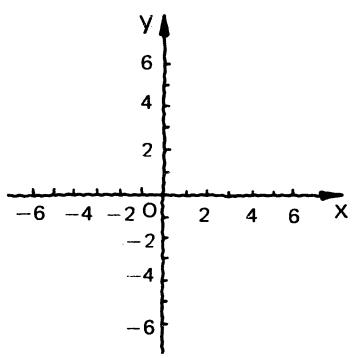
151

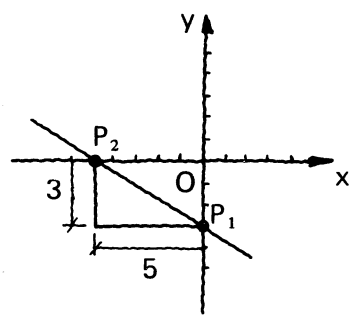
$P_1 = (0, -3)$

$P_2 = (-5, 0)$

$m = -\frac{3}{5}$

Representación gráfica.



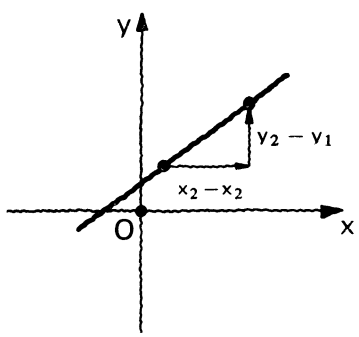

$m = -\frac{3}{5}$

152

Observemos que:
si
la recta representa
una función creciente
(si x aumenta y aumenta)
su pendiente es

⌊ ⌋

positiva/negativa




Estudiar con atención

$y_2 - y_1 > 0$ (+)

$x_2 - x_1 > 0$ (+)

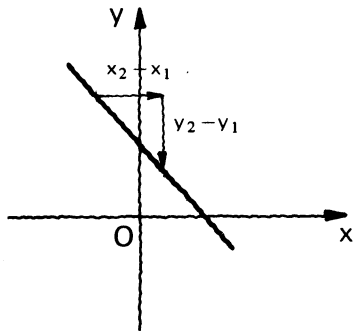
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 0$ (+)

- positva ($m > 0$)

153

Si la recta
representa
una función decreciente
(si **x** aumenta **y** disminuye)
su pendiente es

positiva/negativa




$y_2 - y_1 < 0$ (−)

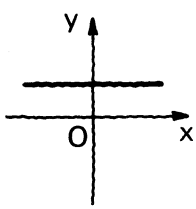
$x_2 - x_1 > 0$ (+)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 0 \quad (-)$$

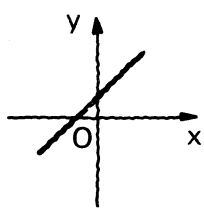
negativa ($m < 0$)

154

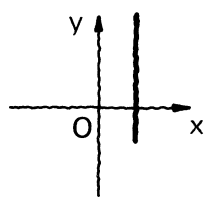
**Resumen**



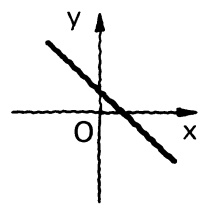

- Recta "horizontal"
  $m = 0$




- Recta "creciente"
  $m > 0$




- Recta "vertical"
  m no definida




- Recta "decreciente"
  $m < 0$

**1.4.1**

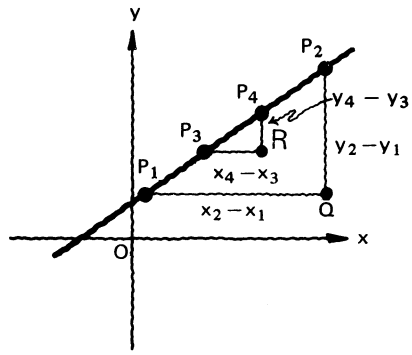
Práctica de
determinación de la pendiente
de una recta
dada por dos puntos,
si se considera necesario.

155

Podemos observar que
la pendiente de una recta
no depende
de los puntos seleccionados
para
determinarla.
En los triángulos semejantes
$P_1P_2Q$ y $P_3P_4R$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

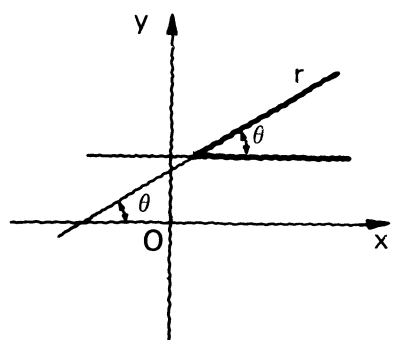
por proporcionalidad
de lados homólogos.




156

La pendiente de una recta
depende más bien
del ángulo $\theta$
que la recta forma
con el eje de las x
o una paralela a él,
y que
llamaremos

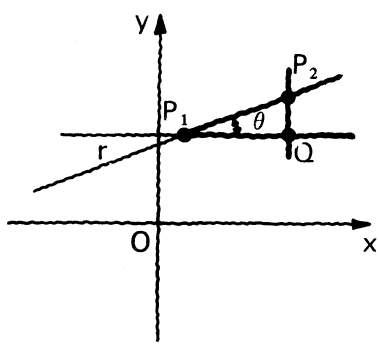
**ángulo de inclinación.**




157

Podemos observar que
si

- $\overleftrightarrow{QP_2} \parallel \overleftrightarrow{OY}$
- $P_1 = (x_1, y_1)$
- $P_2 = (x_2, y_2)$
- $|\overrightarrow{QP_2}| =$ [ ]
- $|\overrightarrow{P_1Q}| =$ [ ]



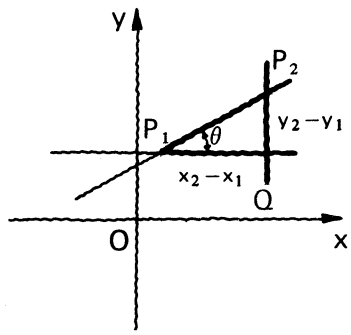

$y_2 - y_1$

$x_2 - x_1$

158

Ahora,
por trigonometría:

$$\tan\theta = \frac{\square}{\square}$$

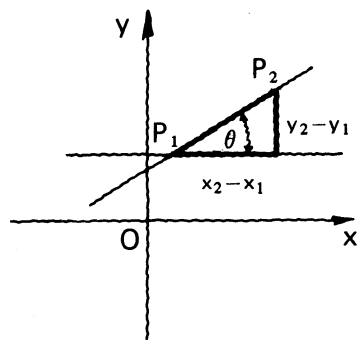



$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

159

Nos damos cuenta que:

$$\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$




160

**m = tan $\theta$**

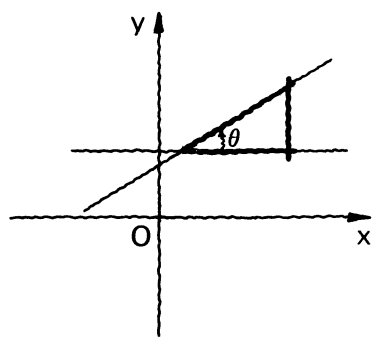
La

**pendiente**

de una recta
es igual a
la

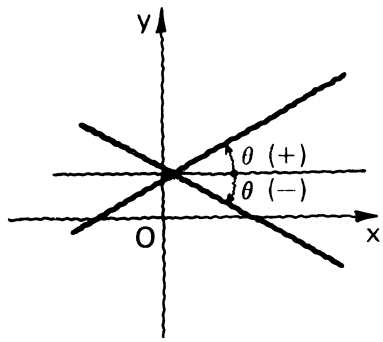
**tangente trigonométrica**

**de su ángulo de inclinación.**



161

Vamos a adoptar esta convención para la medida del ángulo de inclinación.




162

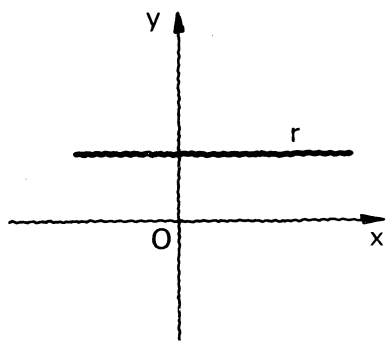
Tenemos, entonces, para una

**recta "horizontal":**

**m = 0**

**tan 0 = 0**

$\measuredangle\, \theta = 0° = 0$ **radiantes.**




163

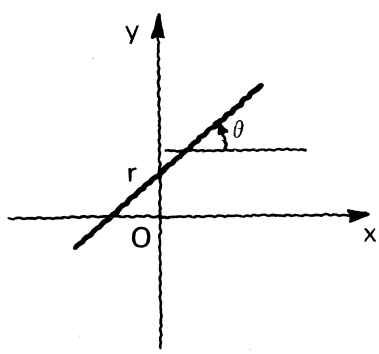
Para una
**recta "creciente":**

**m > o tan θ > 0**

$0 < \measuredangle\, \theta < 90°$ en grados,

o bien

$0 < \measuredangle\, \theta < \frac{\pi}{2}$ en radianes.



164

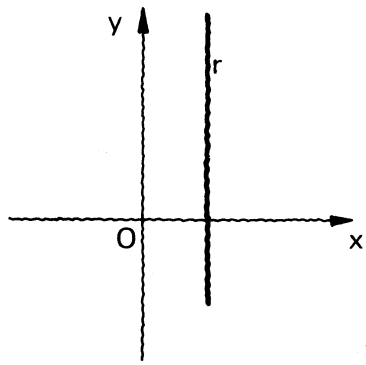
Para una

**recta "vertical":**

**m no definida**

**tan $\frac{\pi}{2}$ no definida**

**$\measuredangle\theta = 90° = \frac{\pi}{2}$ radianes.**



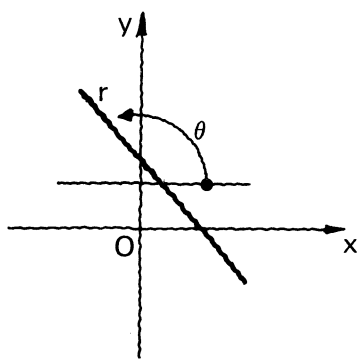

165

Para una

**recta "decreciente":**

**$m < 0$ $\tan\theta < 0$**

**$90° < \measuredangle\theta < 180°$**



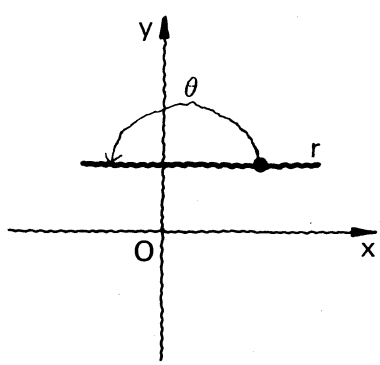

166

Si

$\measuredangle\theta = 180° = \pi$ radianes

la recta es horizontal;
por lo tanto

**$m = \tan\theta = 0$**



167

$\theta = 35°$

m = ⌊_____⌋ = ⌊_____⌋ ≐ ⌊_____⌋

$\tan \theta = \tan 35° \doteq 0.7002$

168

Determinar
la pendiente de una recta
cuyo
ángulo de inclinación es igual a 120°.

m = ⌊_____⌋ = ⌊_____⌋ ≐ ⌊_____⌋

- $\tan \theta = \tan 120° = -\sqrt{3}$
  $\doteq -1.7320$

169

¿Cuál es la medida
del ángulo de inclinación
de una recta
cuya pendiente es igual a $\frac{2}{3}$ ?

$m = \frac{2}{3}$

$\theta$ = ⌊_____⌋ ≐ ⌊_____⌋ ≐ ⌊_____⌋

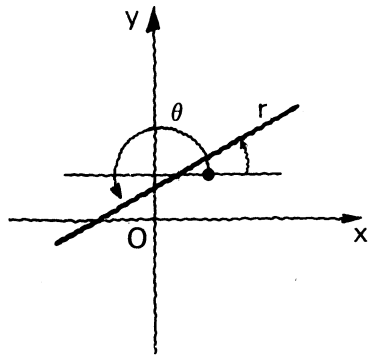
para $0 \leqslant \theta < 2\pi$

- arc tan $\frac{2}{3} \doteq$ arc tan 0.6667
  $\doteq 33° 41'$
  $\doteq 0.5880$ radianes

170

Si $\measuredangle\, \theta > \pi$
no obtendremos
"nuevas inclinaciones"
para la recta r,
por lo cual
nos limitaremos
en este estudio
al intervalo

$0 \leqslant \theta < \pi.$




171

Tomemos nota de estas dos
**definiciones de la pendiente de una recta r.**

- $\mathbf{m = \tan \theta}$

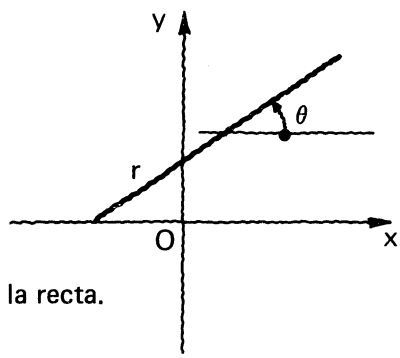
$\theta \in \mathcal{R} \wedge 0 \leqslant \theta < \pi \wedge \theta \neq \frac{\pi}{2}$

- $\mathbf{m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathcal{R} \wedge x_1 \neq x_2$

$\theta$ es el ángulo de inclinación de la recta.

$$\left.\begin{array}{l}(x_1, y_1) = P_1 \\ (x_2, y_2) = P_2\end{array}\right\} P_1, P_2 \in r \wedge P_1 \neq P_2$$




172

Sabemos que
el ángulo de inclinación
de una recta
es igual a 35°.
Determinar su pendiente.

173

La pendiente de una recta es igual a $-2$.
La medida en grados-minutos
del ángulo de inclinación es [_____]

para $0 \leqslant \theta < 2\pi$

$\theta = \arctan(-2)$

- $116° 34'$

**6.1.4.2**

Práctica adicional
de
determinación de la pendiente de
una recta
a partir de su ángulo de inclinación,
si se considera necesario.

**6.1.4.3**

Práctica adicional
de
determinación de
la medida del ángulo de inclinación,
de una recta
a partir de su pendiente,
si se considera necesario.

**6.1.4**

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener la expresión*

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

  para la pendiente de una recta dada por dos puntos,

- *aplicar* la expresión $m = y_2 - y_1 / x_2 - x_1$ a la determinación de la pendiente de una recta dada por dos puntos,

- *obtener* la expresión: $m = \tan \theta$ para la pendiente de una recta, en función del ángulo de inclinación,

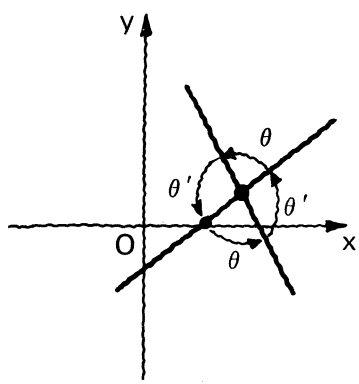
- *aplicar* las expresiones: $m = \tan \theta$ o $\theta = \text{arc tan } m$, para la determinación de la pendiente o del ángulo de inclinación de una recta.

1.5

## Ángulo formado por dos rectas

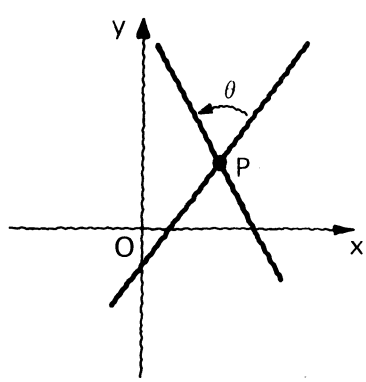
174

Consideremos
dos rectas que se intersecan
en un punto (P), y que
determinan cuatro
ángulos,
congruentes dos a dos.




175

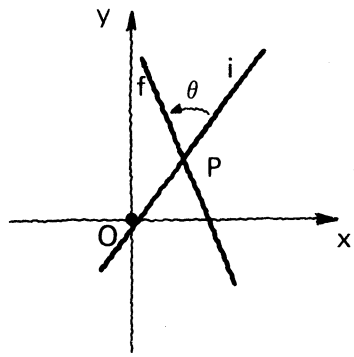
Nos propondremos
encontrar
una expresión
para la medida del ángulo $\theta$
en función de
las pendientes de las dos rectas.



176

Llamemos $\mathbf{m_i}$
a la pendiente de la recta **i**
que contiene al **lado inicial**
del ángulo $\theta$,
y $\mathbf{m_f}$
a la pendiente de la recta **f**,
que contiene al **lado final**
de $\theta$

$\theta$, por convención, lo mediremos en sentido contrario al de las manecillas del reloj.



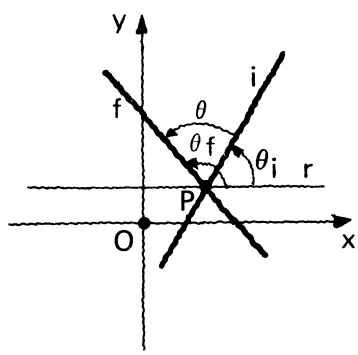

177

Por P hemos trazado
$r \parallel \overleftrightarrow{ox}$.

$\theta_i$ es el ángulo de inclinación de la recta **i**
y
$\theta_f$ es el ángulo de inclinación de la recta **f**.

Entonces,

$\theta =$ [ ]



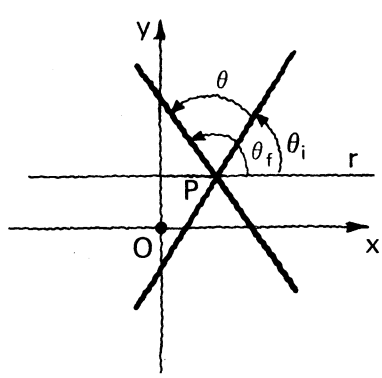

$\theta_f - \theta_i$

178

$\theta = \theta_f - \theta_i$

Por lo tanto:

$\tan \theta = \tan (\theta_f - \theta_i)$



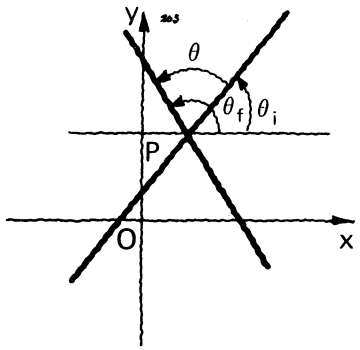
179

$\tan \theta = \tan (\theta_f - \theta_i)$

Expresando

$\tan (\theta_f - \theta_i) = f(\tan \theta_i, \tan \theta_f)$

por la
identidad trigonométrica
de la tangente de la diferencia de
dos ángulos:




$\tan (\theta_f - \theta_i) = \dfrac{\tan \theta_f - \tan \theta_i}{1 + \tan \theta_f \tan \theta_i}$

180

$$\tan \theta = \frac{\tan \theta_f - \tan \theta_i}{1 + \tan \theta_f \cdot \tan \theta_i}$$

Pero, podemos sustituir

$\tan \theta_f = m_f$ y $\tan \theta_i = m_i$

con lo que obtenemos:

$\tan \theta =$ ⌊ ⌋

$$\frac{m_f - m_i}{1 + m_f \cdot m_i}$$

181

Obtenemos las siguientes expresiones
para el ángulo formado por dos rectas.

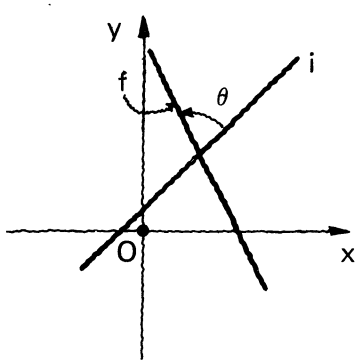
- $\tan \theta = \dfrac{m_f - m_i}{1 + m_f \cdot m_i}$

$0 \leqslant \theta < \pi$

$m_i, m_f \in \mathbb{R}$

$m_f \cdot m_i \neq -1$

- $\theta = \text{arc tan } \dfrac{m_f - m_i}{1 + m_f \cdot m_i}$

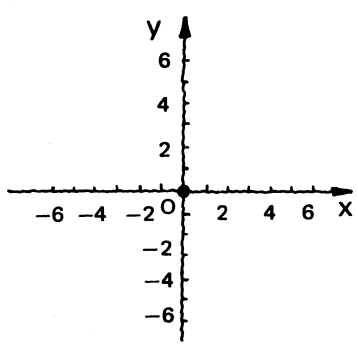


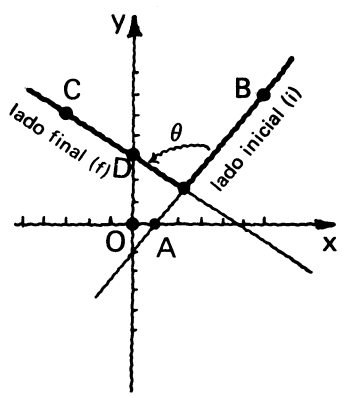
182

Los puntos A = (1, 0) y B = (6, 6)
determinan una recta,
y
los puntos C = (– 3, 5) y D = (0, 3)
determinan una segunda recta.
Se requiere calcular la medida del
ángulo formado por ambas rectas, de tal
modo que el lado inicial esté contenido
en la recta $\overleftrightarrow{AB}$

183

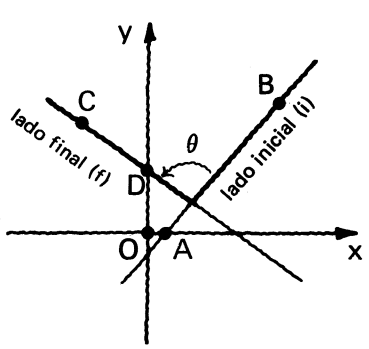
Empecemos por hacer
la representación gráfica
de la situación.




184

Escribamos la
expresión general
para tan $\theta$

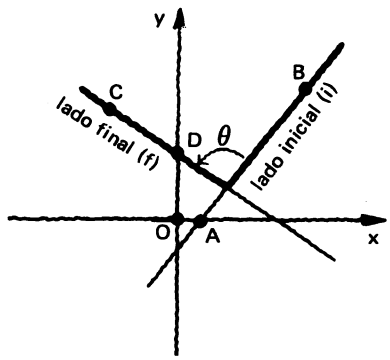



$$\tan\theta = \frac{m_f - m_i}{1 + m_f\, m_i}$$

185

A = (1, 0)
B = (6, 6)
} (i)

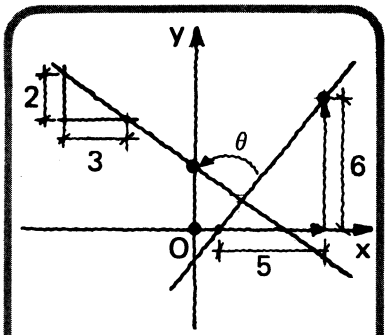
C = (– 3, 5)
D = (0, 3)
} (f)




$$\tan\theta = \frac{m_f - m_i}{1 + m_f\, m_i}$$

$m_f$ = [ ] = [ ]

$m_i$ = [ ] = [ ]




- $\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{3-5}{0-(-3)} = -\frac{2}{3}$
- $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-0}{6-1} = \frac{6}{5}$

186

$$\tan\theta = \frac{m_f - m_i}{1 + m_f\, m_i}$$

$m_f = -\frac{2}{3}$

$m_i = \frac{6}{5}$

$\tan\theta \doteq$ [ ]

(como fracción decimal)

$$\tan\theta = \frac{-\frac{2}{3} - \frac{6}{5}}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)\frac{6}{5}} = \frac{\frac{-10-18}{15}}{1 - \frac{12}{15}} = \frac{\frac{-28}{15}}{\frac{15-12}{15}} = \frac{-28}{3}$$

- + 9.3333

187

$\tan\theta = -9.3333$

$\theta$ = [ ]

= [ ]

= [ ]

$0 \leqslant \theta < \pi$

arc tan – 9.3333

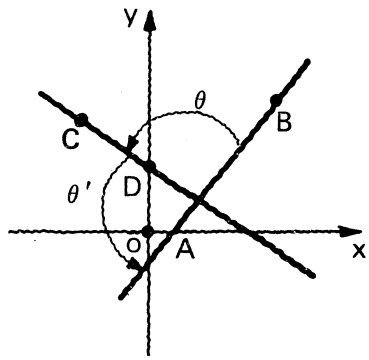
180° – 85° 53′

94° 07′

188

$\theta = 94° 07'$

La medida de $\theta'$ sería igual a



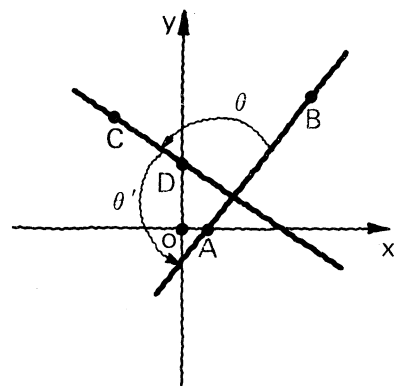

85° 53′

189

Estudiar con cuidado el procedimiento completo.

A = (1, 0)
B = (6, 6)
} lado inicial (i)

C = (− 3, 5)
D = (0, 3)
} lado final (f)




$$m_f = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = -\frac{2}{3}$$

$$m_i = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{m_f - m_i}{1 + m_f\, m_i} = -9.3333$$

$\theta = \text{arc tan} - 9.333 = 180° - 85° 53' = 94° 07'$ para $0 \leqslant \theta < \pi$

$\theta' = 85° 53'$

Si el trazo de la gráfica se realiza con cuidado, la medida de los ángulos puede ser verificada con la ayuda de un transportador.

**6.1.5.1**

Práctica adicional
de
determinación de los ángulos
formados por dos rectas
de pendiente dada,
si se considera necesario.

**6.1.5**

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* la expresión:

$$\tan \theta = \frac{m_f - m_i}{1 + m_f \cdot m_i}$$

  para el ángulo formado por dos
  rectas intersecantes;

- *aplicar* la expresión anterior a la
  determinación de los ángulos formados
  por dos rectas de pendiente dada.

## 1.6

## Paralelismo, colinealidad y perpendicularidad

190

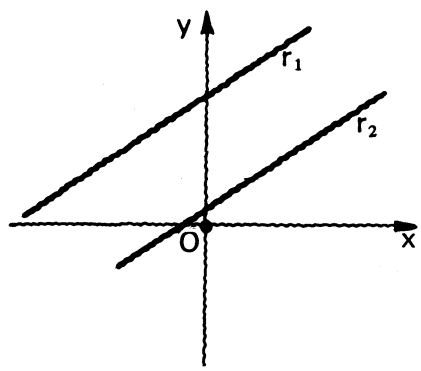
**Condición de paralelismo**

Sean $r_1$ y $r_2$ dos rectas,
$m_1$ la pendiente de $r_1$,
y
$m_2$ la pendiente de $r_2$.

Se verifica:

- $m_1 = m_2 \Leftrightarrow r_1 \parallel r_2$

Dos rectas son paralelas
si y sólo si
tienen pendiente iguales.

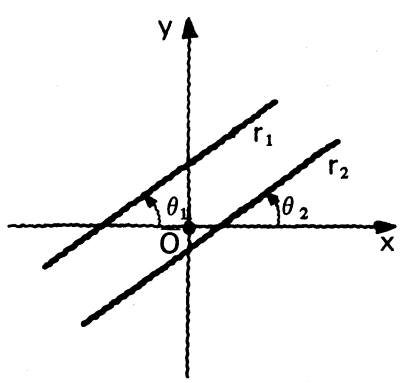



191

Es fácil ver que

- $\theta_1 = \theta_2 \Leftrightarrow r_1 \parallel r_2$

Dos rectas son paralelas
si y sólo si
las medidas de sus
ángulos de inclinación
son iguales.



192

Ahora,
para que tres puntos

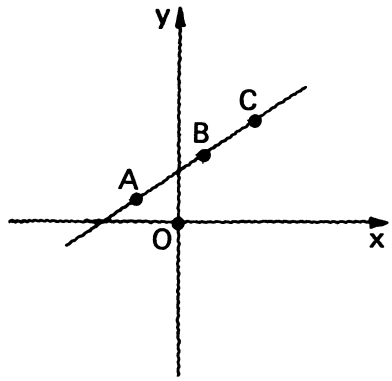
$A = (x_A, y_A)$

$B = (x_B, y_B)$

y

$C = (x_C, y_C)$

sean colineales
se requiere que:




Intentemos dar la condición de colinealidad

$m_{AB} = m_{BC}$

ó

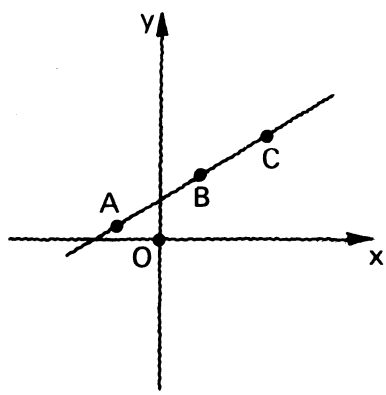
$m_{AC} = m_{AB}$

ó

$m_{AC} = m_{BC}$

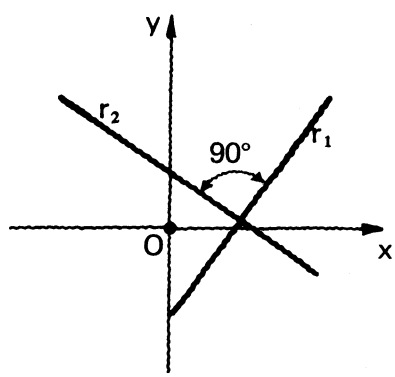
193

Podemos observar que
la pendiente de una recta
es
única
para toda
su longitud.



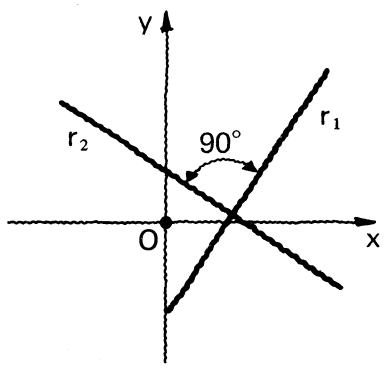

194

Ahora
vamos a
determinar las condiciones
para que
dos rectas sean
perpendiculares.



195

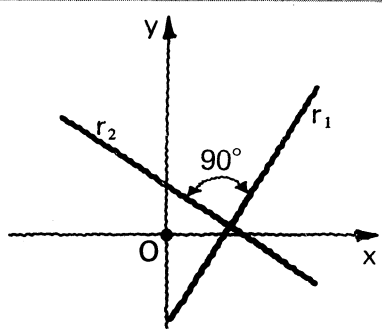
Escribamos la expresión para la medida del ángulo $\theta$ formado por dos rectas:




$$\tan\theta = \frac{m_f - m_i}{1 + m_f\, m_i}$$

196

$$\tan\theta = \frac{m_f - m_i}{1 + m_f\, m_i}$$




Sustituyendo $\theta = 90°$ obtenemos:

$$\tan 90° = \frac{m_f - m_i}{1 + m_f\, m_i} = \text{número no definido}$$

197

$\dfrac{m_f - m_i}{1 + m_f\, m_i}$ = número definido.

Sabemos que la expresión no se define para:

$1 + m_f\, m_i = 0$

198

$1 + m_f \cdot m_i = 0$

de donde

$m_f \cdot m_i =$ ⌊_____⌋

$-1$

199

$\mathbf{m_f \cdot m_i = -1}$

Esta "condición de perpendicularidad" puede también ser expresada así:

$m_i =$ ⌊_____⌋

$-\frac{1}{m_f}$

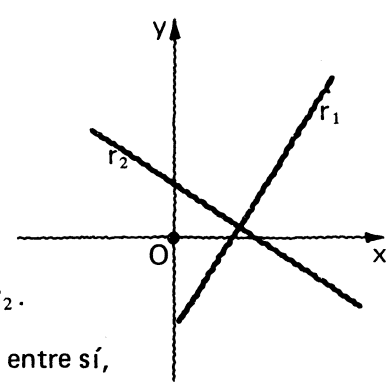
o

$m_f =$ ⌊_____⌋

$-\frac{1}{m_i}$

200

Entonces,
si $r_1$ y $r_2$ son dos rectas,
$m_1$ es la pendiente de $r_1$,
y
$m_2$ es la pendiente de $r_2$,




- $\mathbf{m_1 \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow r_1 \perp r_2}$.

Dos rectas son perpendiculares entre sí,
si y sólo si
sus pendientes son recíprocas y de signo contrario.

201

Por ejemplo,
si la pendiente de una recta es igual a $\frac{3}{4}$

la pendiente de una recta perpendicular

a ella, deberá ser igual a [ ]

$-\frac{4}{3}$

202

Dos rectas, $r_1$ y $r_2$, son perpendiculares.
La pendiente de $r_1$ es igual a 2;

la pendiente de $r_2$ deberá ser igual a [ ]

$-\frac{1}{2}$

203

La pendiente de una recta perpendicular
a otra de pendiente 1, es igual a [ ]

$-1$

204

Dos rectas son paralelas.

La pendiente de una de ellas es igual a $\frac{3}{2}$;

la pendiente de la otra es igual a [ ]

$\frac{3}{2}$

205

Una recta tiene una pendiente igual a $-3$.

La pendiente de una recta paralela a ella es igual a [ ]

La pendiente de una recta perpendicular a ella

es igual a [ ]

$-3$

$\frac{1}{3}$

206

Señalar la opción correcta y completar.

Los tres puntos:

A = (− 3, 0)
B = (0, 4)
C = (3, 8)

**son colineales/no son colineales**

porque [ ]

- son colineales

por ejemplo:

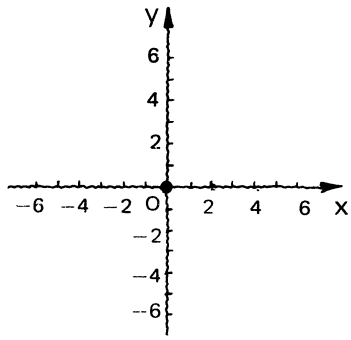
$m_{AB} = \frac{4-0}{0-(-3)} = \frac{4}{3}$

$m_{BC} = \frac{8-4}{3-0} = \frac{4}{3}$

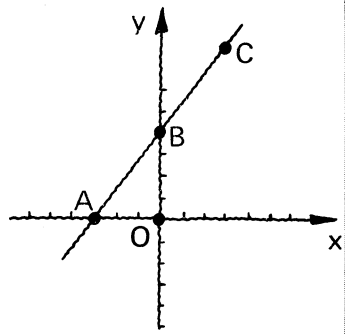
- $m_{AB} = m_{BC}$

207

A = (– 3, 0)
B = (0, 4)
C = (3, 8)




Representación gráfica.




208

Los tres puntos:

A = (3, – 2)
B = (– 3, 5)
C = (1, 1)

**son/no son colineales**

porque

- no son

por ejemplo,

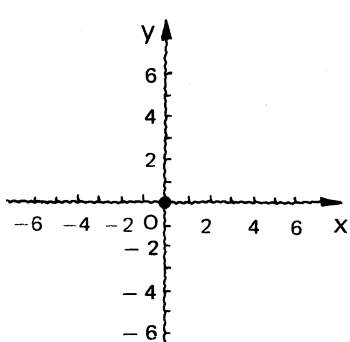
$$m_{AB} = \frac{5 - (-2)}{-3 - 3} = -\frac{7}{6}$$

$$m_{BC} = \frac{1 - 5}{1 - (-3)} = -\frac{5}{4}$$

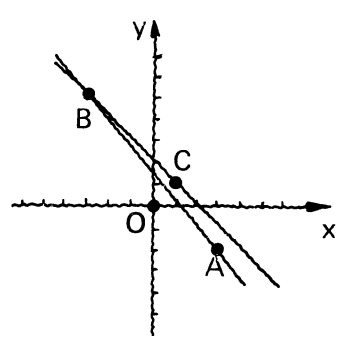
- $m_{AB} \neq m_{BC}$

209

A = (3, – 2)
B = (– 3, 5)
C = (1, 1)




Representación gráfica.



**6.1.6.1**

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

**6.1.6**

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* las condiciones de: paralelismo, colinealidad y perpendicularidad de dos rectas en el plano cartesiano.

## 1.7

## Ejercicios de aplicación

210

Los puntos:

A = (– 4, 2)
B = (3, 6)
C = (1, – 4)

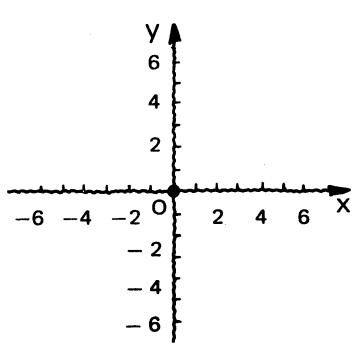
son los vértices de un triángulo.

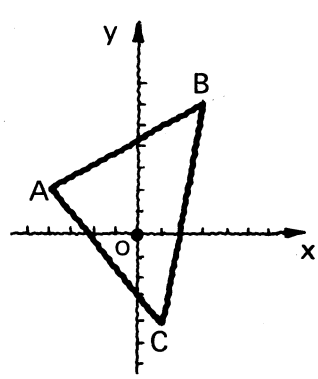
Se requiere determinar:

1. el perímetro ABC
2. el área ▲ ABC
3. las medidas de los tres ángulos interiores
4. las medidas de las tres medianas

211

Representamos el △ ABC en el plano cartesiano.



212

**1. Determinación del perímetro.**

Perímetro ABC =

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

Cálculo de $|\overrightarrow{AB}|$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$= \sqrt{[(3 - (-4)]^2 + (6 - 2)^2}$$

$$= \sqrt{7^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{65} \doteq 8.06$$

Cálculo de $|\overrightarrow{BC}|$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

$$= \sqrt{(1 - 3)^2 + (-4 - 6)^2}$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (-10)^2}$$

$$= \sqrt{104} \doteq 10.20$$

Cálculo de $|\overrightarrow{CA}|$

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

$$= \sqrt{(-4 - 1)^2 + [2 - (-4)^2}$$

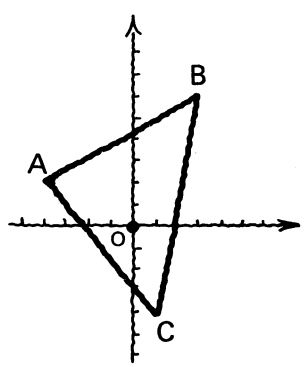
$$= \sqrt{(-5)^2 + 6^2}$$

$$= \sqrt{61} \doteq 7.81$$

perímetro ABC = $\sqrt{65} + \sqrt{104} + \sqrt{61} \doteq 26.07$

213

Las longitudes de los lados,
y por lo tanto el perímetro,
pueden ser verificados
gráficamente,
si se ejecuta el trazo
cuidadosamente.



214

**2. Determinación del área.**

Área ▲ ABC =

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

perímetro ABC ≐ 26.07
semiperímetro s ≐ 13.035

$s - |\overleftrightarrow{AB}| \doteq 13.035 - 8.06 \doteq 4.975$

$s - |\overleftrightarrow{BC}| = 13.035 - 10.20 \doteq 2.835$

$s - |\overleftrightarrow{CA}| = 13.035 - 7.81 \doteq 5.225$

área ▲ ABC $= \sqrt{s(s - |\overleftrightarrow{AB}|)\,(s - |\overleftrightarrow{BC}|)\,(s - |\overleftrightarrow{CA}|)}$

$\doteq \sqrt{13.035 \times 4.975 \times 2.835 \times 5.225}$

$\doteq \sqrt{960.60}$

$\doteq \sqrt{30.99}$

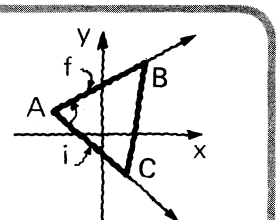
215

**3. Determinación de ∡ A.**

Lado inicial [ ]

Lado final [ ]

De acuerdo con nuestra convención,
observando la gráfica del △ ABC.




- $\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AB}$

216

$m_f = m_{AB} =$ ⌊ ⌋ $=$ ⌊ ⌋

$m_i = m_{AC} =$ ⌊ ⌋ $=$ ⌊ ⌋

Verificar en la gráfica.

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-2}{3-(-4)} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-4-2}{1-(-4)} = -\frac{6}{5}$$

217

$\tan A =$ ⌊ ⌋ expresión general

Sustitución de datos y operaciones:

$\measuredangle A \doteq$ ⌊ ⌋

Respuesta en el cuadro siguiente.

- $\dfrac{m_f - m_i}{1 + m_f \cdot m_i}$

$$\frac{\frac{4}{7} - \left(-\frac{6}{5}\right)}{1 + \frac{4}{7}\left(-\frac{6}{5}\right)} \qquad \frac{\frac{4}{7} + \frac{6}{5}}{1 - \frac{24}{35}}$$

$$\frac{\frac{20 + 42}{35}}{\frac{35 - 24}{35}}$$

$$\frac{62}{11} \doteq 5.636363$$

- $\measuredangle A = 79° 56'$

218

**3.1. Determinación de $\measuredangle$ B.**

$\measuredangle$ B $\doteq$ [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente.

lado inicial: $\overleftrightarrow{AB}$

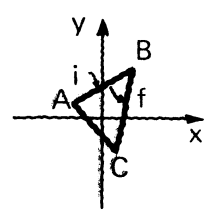
lado final: $\overleftrightarrow{BC}$

$$m_f = m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-4-6}{1-3} = 5$$

$$m_i = m_{AB} = \frac{4}{7}$$

$$\tan B = \frac{5 - \frac{4}{7}}{1 + 5 \cdot \frac{4}{7}} = \frac{\frac{35-4}{7}}{1 + \frac{20}{7}} = \frac{31}{27} \doteq 1.1481481$$

$\measuredangle$ B $\doteq 48^\circ\ 58'$

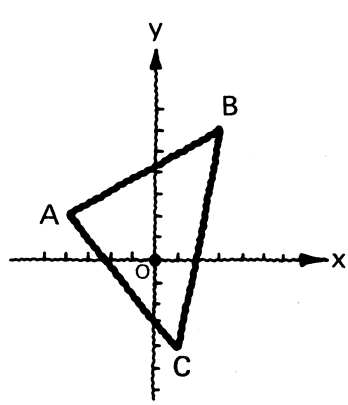



219

Hemos obtenido:

$\measuredangle$ A $\doteq 79^\circ\ 56'$

$\measuredangle$ B $\doteq 48^\circ\ 58'$



220

### 3.2. Determinación de ∡ C.

$\measuredangle C \doteq$ _____

Respuesta
en el
cuadro siguiente.

lado inicial: $\overleftrightarrow{BC}$

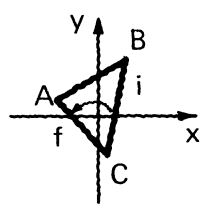
lado final: $\overleftrightarrow{AC}$

$m_f = m_{AC} = -\frac{6}{5}$

$m_i = m_{BC} = 5$

$$\tan C = \frac{-\frac{6}{5} - 5}{1 + \left(-\frac{6}{5}\right)5} = \frac{\frac{-6-25}{5}}{1-6} = \frac{\frac{-31}{5}}{-5} = \frac{31}{25} \doteq 1.24$$

$\measuredangle C \doteq 51° 07'$




221

Hemos obtenido:

$\measuredangle A \doteq 79° 56'$

$\measuredangle B \doteq 48° 58'$

$\doteq C \doteq 51° 07'$

Verificación:

sumando:

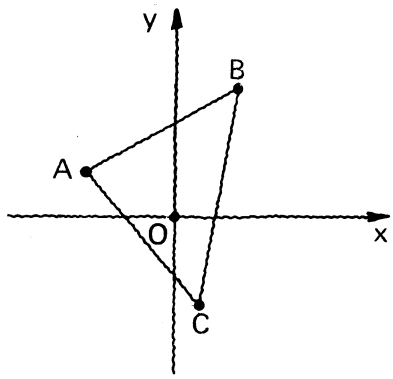
$$\begin{array}{r} 79° 56' \\ 48° 58' \\ 51° 07' \\ \hline 178° 121' \end{array}$$

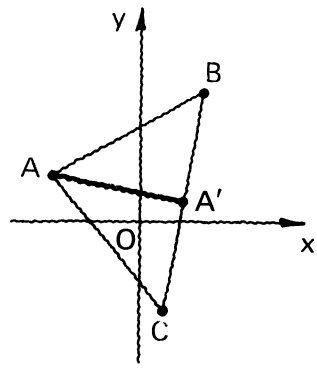
$180° 01' \doteq 180°$

222

**4. Determinación de la mediana correspondiente al vértice A.**

Empecemos por trazar la mediana correspondiene al vértice A.




A′ es el punto medio de $\overleftrightarrow{BC}$

223

Hay que determinar el punto medio de $\overleftrightarrow{BC}$.

$x_{A'}$ = [ ] expresión general.

[ ]

$x_{A'}$ = [ ]

$y_{A'}$ = [ ] expresión general.

[ ]

$y_{A'}$ = [ ]

- $\dfrac{x_B + x_C}{2}$

$\dfrac{3 + 1}{2}$

- 2
- $\dfrac{y_B + y_C}{2}$

$\dfrac{6 + (-4)}{2}$

- 1

224

Punto medio de $\overleftrightarrow{BC}$: $A' = (2, 1)$

Medida de la mediana del vértice A:

$|\overrightarrow{AA'}|$ = [ ] expresión general

Sustitución de datos y operaciones: [ ]

$|\overrightarrow{AA'}|$ = [ ]

Verificar gráficamente.

$\sqrt{(x_{A'} - x_A)^2 + (y_{A'} - y_A)^2}$

$\sqrt{[2 - (-4)]^2 + (1 - 2)^2}$

$\sqrt{6^2 + (-1)^2}$

$\sqrt{37} \doteq 6.08$

225

**4.1. Determinación de la mediana correspondiente al vértice B.**

Respuesta en el cuadro siguiente.

- $|\overrightarrow{BB'}| =$

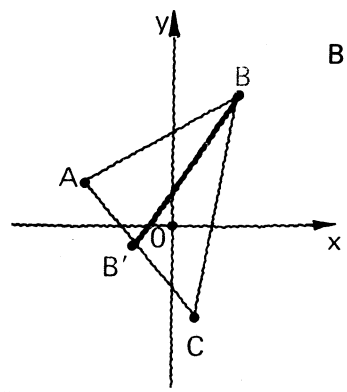
$$x_{B'} = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-4+1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$y_{B'} = \frac{2+(-4)}{2} = -1$$

$$|\overrightarrow{BB'}| = \sqrt{(x_{B'} - x_B)^2 + (y_{B'} - y_b)^2}$$

$$= \sqrt{-\left(\frac{3}{2} - 3\right)^2 + (-1-6)^2}$$

$$= \sqrt{-\left(\frac{9}{2}\right)^2 + (-7)^2} \qquad = \sqrt{\frac{81}{4} + 49} = \frac{\sqrt{277}}{2} \doteq 8.32$$




$$B' = \left(-\frac{3}{2}, 3\right)$$

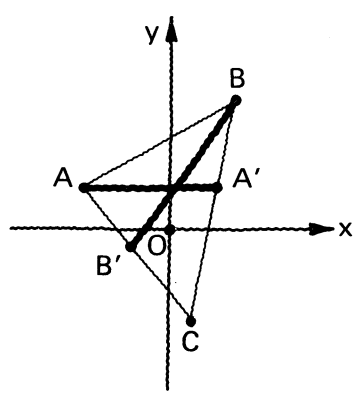
- $|\overrightarrow{BB'}| \doteq 8.32$

226

Hemos obtenido:

$|\overrightarrow{AA'}| \doteq 6.08$

$|\overrightarrow{BB'}| \doteq 8.32$



227

**4.2. Determinación de la mediana correspondiente al vértice C.**

Respuesta en el cuadro siguiente.

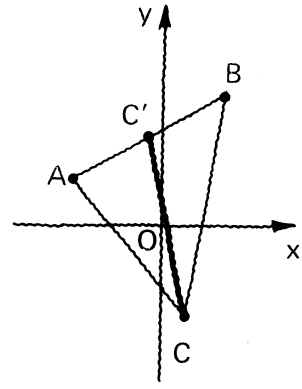
$$x_{C'} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-4+3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$y_{C'} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$$

$$|\overrightarrow{CC'}| = \sqrt{(x_{C'} - x_C)^2 + (y_{C'} - y_C)^2}$$

$$= \sqrt{-\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + [4 - (-4)]^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 8^2} \qquad = \sqrt{\frac{9}{4} + 64} = \sqrt{265/2} \doteq 8.14$$




$$C' = \left(-\frac{1}{2}, 4\right)$$

● $|\overrightarrow{C\,C'}| \doteq 8.14$

**6.1.7.1**

Práctica adicional de aplicación de los conceptos estudiados, si se considera necesario.

**6.1.7**

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *resolver* problemas que involucren algunos de los procedimientos siguientes:
  - — determinación de la distancia entre dos puntos,
  - — determinación del punto que divide a un segmento según una razón dada,
  - — determinación del punto medio de un segmento,
  - — determinación del ángulo formado por dos rectas.

*Esta obra se terminó de imprimir*
*el día 15 de agosto de 1984,*
*en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,*
*Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,*
*Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,*
*se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,*
*Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,*
*Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,*
*se tiraron*
*3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición*

CO REG KC 100

## Bloque 6:

### *Geometría analítica*

En los ocho *módulos de color morado* que forman el bloque 6, *Geometría analítica*, se amplían y formalizan los conceptos de relación, función y gráfica cartesiana. En el *módulo 1* se incluyen algunos conceptos y procedimientos elementales, tales como:

- Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano
- División de un segmento rectilíneo según una razón dada
- Ángulo formado por dos rectas concurrentes
- Pendiente y ángulo de inclinación de una recta

Después, se conduce *paso a paso* al lector hacia la revisión de los lugares geométricos más comunes. Así, en el *módulo 2* se analiza la recta; en el *módulo 3*, la circunferencia; en el *módulo 4*, la elipse; en el *módulo 5*, la hipérbola, y en el *módulo 6*, la parábola.

Luego, con el estudio de las cónicas y la ecuación general de segundo grado, el cual se realiza en el *módulo 7*, se accede a la integración de un gran marco conceptual.

Dicho marco conceptual se amplía aún más en el *módulo 8*, donde se brindan los elementos necesarios para llevar a cabo el análisis de cualquier lugar geométrico del plano cartesiano.

Por último, las fórmulas y los conceptos fundamentales de todos los temas comprendidos en los módulos que integran este bloque, aparecen en el módulo de resumen llamado *Memo 6. Geometría analítica.*

| Bloque | Módulo | Módulo de resumen |
|---|---|---|
| **1** **ÁLGEBRA** ESTRUCTURAS Y OPERACIONES **Libros color café** | *1- Conjuntos*<br>*2- Estructuras matemáticas*<br>*3- El conjunto de los enteros*<br>*4- Operaciones con enteros*<br>*5- Lenguaje algebraico 1. Formación*<br>*6- Lenguaje algebraico 2. Transformación*<br>*7- Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división*<br>*8- Operaciones con polinomios 2. Productos notables*<br>*9- Operaciones con polinomios 3. Factorización*<br>*10- El conjunto de los racionales*<br>*11- Operaciones con expresiones racionales*<br>*12- El conjunto de los reales*<br>*13- Operaciones con expresiones reales*<br>*14- El conjunto de los complejos. Estructura y operaciones* | ***MEMO 1***<br>*ÁLGEBRA. ESTRUCTURAS Y OPERACIONES* |
| **2** **ÁLGEBRA** MODELOS **Libros color verde** | *1- La ecuación como modelo matemático*<br>*2- Ecuaciones de primer grado*<br>*3- Sistemas de ecuaciones de primer grado*<br>*4- Desigualdades de primer grado*<br>*5- Ecuaciones de segundo grado*<br>*6- Desigualdades de segundo grado*<br>*7- La relación como modelo matemático*<br>*8- Funciones*<br>*9- Funciones exponenciales*<br>*10- Funciones logarítmicas*<br>*11- Ecuaciones, desigualdades y sistemas. Soluciones gráficas*<br>*12- Resolución de problemas* | ***MEMO 2***<br>*ÁLGEBRA. MODELOS* |
| **NOCIONES DE LÓGICA MATEMÁTICA** **3** **Libros color azul** | *1- Lógica proposicional 1. Proposiciones*<br>*2- Lógica proposicional 2. Argumentos* | ***MEMO 3***<br>*NOCIONES DE LÓGICA MATEMÁTICA* |
| **4** **GEOMETRÍA EUCLIDIANA** **Libros color rojo** | *1- Conjuntos de puntos*<br>*2- Relaciones binarias*<br>*3- Figuras planas*<br>*4- El aparato demostrativo. Ángulos y triángulos.*<br>*5- Polígonos convexos*<br>*6- Relación de semejanza*<br>*7- Geometría métrica en el plano*<br>*8- Cuerpos geométricos* | ***MEMO 4***<br>*GEOMETRÍA EUCLIDIANA* |
| **5** **TRIGONOMETRÍA** **Libros color ocre** | *1- Las razones trigonométricas de un ángulo agudo*<br>*2- Resolución de triángulos rectángulos*<br>*3- El círculo trigonométrico*<br>*4- Las funciones trigonométricas*<br>*5- Las funciones trigonométricas inversas*<br>*6- Identidades trigonométricas*<br>*7- Resolución de triángulos cualesquiera*<br>*8- Ecuaciones trigonométricas* | ***MEMO 5***<br>*TRIGONOMETRÍA* |
| **6** **GEOMETRÍA ANALÍTICA** **Libros color morado** | ***1- Introducción a la geometría analítica***<br>*2- La recta*<br>*3- La circunferencia*<br>*4- La elipse*<br>*5- La hipérbola*<br>*6- La parábola*<br>*7- Las cónicas y la ecuación general de segundo grado*<br>*8- Relaciones y lugares geométricos* | ***MEMO 6***<br>*GEOMETRÍA ANALÍTICA* |
| **7** **CÁLCULO DIFERENCIAL** **Libros color azul turquesa** | *1- Introducción al cálculo diferencial*<br>*2- Límite de una función*<br>*3- Continuidad de una función*<br>*4- Derivación de funciones algebraicas*<br>*5- Derivación de funciones trascendentes*<br>*6- Extremos de una función (máximos y mínimos)* | ***MEMO 7***<br>*CÁLCULO DIFERENCIAL* |
| **8** **CÁLCULO INTEGRAL** **Libros color negro** | *1- Sumatoria y notación sigma*<br>*2- La integral definida y la integral indefinida*<br>*3- Integrales elementales*<br>*4- Métodos de integración 1*<br>*5- Métodos de integración 2*<br>*6- Algunas aplicaciones del cálculo integral* | ***MEMO 8***<br>*CÁLCULO INTEGRAL* |

ISBN 968-24-1248-X